

因数分解(1)

因数

ある式がいくつかの式の積の形で表されるとき、かけ合わされたそれぞれの式のことをもとの式の**因数**という。

例) 多項式 $x^2 + (a+b)x + ab$ は $x+a$ と $x+b$ の積である。

$$\underbrace{x^2 + (a+b)x + ab}_{\text{もとの式}} = (x+a)(x+b)$$

このとき、 $x+a$ と $x+b$ を $x^2 + (a+b)x + ab$ の**因数**という。

因数分解

多項式を因数の積の形であらわすことを、**因数分解**するという。

$$\text{例) } x^2 + (a+b)x + ab \xrightarrow{\text{因数分解}} (x+a)(x+b)$$

←展開 …因数分解した式をもとに戻すと式の展開になる。

共通因数

多項式の各項に共通な因数があるときは、その因数をかつこの外にくくり出して因数分解する。

例1) $ab - ac = a(b - c)$ 例2) $x^2 + x = x \times x + x \times 1 = x(x + 1)$

↑ 共通因数 ↑ 因数分解
↑ 共通因数 ↑ 因数分解

【1】共通因数をくくりだして、次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax + bx = x(a + b)$

(2) $12ax - 6bx = 6x(2a - b)$

(3) $3mn + 12m = 3m(n + 4)$

(4) $ab + ac + ad = a(b + c + d)$

(5) $x^2 - 2x = x(x - 2)$

(6) $2m^2 + 6mn = 2m(m + 3n)$

(7) $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

(8) $2a^2b - 3ab^2 = ab(2a - 3b)$

(9) $x^2 - 4xy + 4x = x(x - 4y + 4)$

(10) $2x^2y - 3xy^2 + xy = xy(2x - 3y + 1)$

(11) $9x^3 - 3x^2 = 3x^2(3x - 1)$

(12) $6x^3y - 4x^2y^2 - 8x^2y$
 $= 2x^2y(3x - 2y - 4)$



因数分解(2)

因数分解の公式

式の展開に使う乗法公式を逆にすると、因数分解の公式になる。

公式(1) $(x+a)(x+b)$ の積

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

公式(2) 和の平方

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

公式(3) 差の平方

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

公式(4) $(x+a)(x-a)$ の積

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

【1】 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad x^2 + 8x + 7 \quad \text{和が8, 積が7になる2数は1と7}$$

$$= (x+1)(x+7)$$

$$(2) \quad x^2 - 5x + 6 \quad \text{和が-5, 積が6になる2数は-2と-3}$$

$$= (x-2)(x-3)$$

$$(3) \quad x^2 + 3x - 18 \quad \text{和が3, 積が-18になる2数は-3と6}$$

$$= (x-3)(x+6)$$

$$(4) \quad x^2 - 5x - 36 \quad \text{和が-5, 積が-36になる2数は-9と4}$$

$$= (x-9)(x+4)$$

$$(5) \quad x^2 + 4x + 4$$

$$= x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2$$

$$= (x+2)^2$$

$$(6) \quad x^2 - 10x + 25$$

$$= x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2$$

$$= (x-5)^2$$

$$(7) \quad x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

$$= (x+3)(x-3)$$

$$(8) \quad x^2 - 49 = x^2 - 7^2$$

$$= (x+7)(x-7)$$

【2】 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad x^2 + 7x + 10 \quad \text{和が7, 積が10になる2数は2と5}$$

$$= (x+2)(x+5)$$

$$(2) \quad x^2 - 5x - 24 \quad \text{和が-5, 積が-24になる2数は-8と3}$$

$$= (x-8)(x+3)$$

$$(3) \quad x^2 + 12x + 36$$

$$= x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2$$

$$= (x+6)^2$$

$$(4) \quad x^2 - 6x + 9$$

$$= x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2$$

$$= (x-3)^2$$

$$(5) \quad x^2 - 16 = x^2 - 4^2$$

$$= (x+4)(x-4)$$

$$(6) \quad 49 - x^2 = 7^2 - x^2$$

$$= (7+x)(7-x)$$



因数分解(3)

素数

1とその数以外に約数がない数を**素数**という。2, 3, 5, 11などは素数である。
ただし1は素数ではない。

素因数分解

素数である因数を**素因数**といい、自然数を素因数の積であらわすことを**素因数分解**という。

例1) 6の素因数は2と3。

6を素因数分解すると、

$$6 = 2 \times 3$$

素因数の積の形であらわす。

例2) 12を素因数分解する。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ \text{素因数} \quad 3 \end{array}$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \\ = 2^2 \times 3$$

… ① 12を素数で順にわる

… ② 素因数の積の形であらわす

… ③ 同じ数の積は累乗の指数を使ってあらわす

【1】次の数を素因数分解しなさい。

(1) $10 = 2 \times 5$

(2) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(3) $18 = 2 \times 3 \times 3 \\ = 2 \times 3^2$

(4) $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ = 2^4 \times 3$

(5) $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ = 2^2 \times 3 \times 5$

(6) $78 = 2 \times 3 \times 13$

(7) $132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 \\ = 2^2 \times 3 \times 11$

(8) $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ = 2^2 \times 3^2 \times 5$

【2】次の問いに答えなさい。

(1) 196を素因数分解しなさい。

$$196 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 7^2$$

答え $2^2 \times 7^2$

(2) 196はどのような自然数の2乗になっているか答えなさい。

(1)より196を素因数分解すると、 $196 = 2^2 \times 7^2$ である。

$$196 = 2^2 \times 7^2 = (2 \times 7)^2 = 14^2$$

答え 14

(3) 28にできるだけ小さな自然数をかけて、ある自然数の2乗になるようにする。

どのような自然数をかければよいか答えなさい。

28を素因数分解すると、 $28 = 2^2 \times 7$ である。すべての累乗の指数が偶数になるようにすればいいので、求める自然数は7である。このとき、

$28 \times 7 = 196 = 2^2 \times 7^2 = 14^2$ で、14の2乗になっている。

答え 7



因数分解(4)

いろいろな式の因数分解

複雑な式の因数分解では、共通な因数をくくり出したり、式の一部をひとつの文字だと考えると、公式が使えるようになることがある。

例1) $2x^2 + 10x + 12$
 $= 2(x^2 + 5x + 6)$ ← 共通因数をくくり出す
 $= 2(x+2)(x+3)$ ← カッコの中を因数分解

例2) $4x^2 - 1$
 $= (2x)^2 - 1^2$... $2x$ をA, 1 をBとすると、 $A^2 - B^2$ となり、公式が使える。 $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
 $= (2x-1)(2x+1)$

素因数分解と最小公倍数・最大公約数

2つの自然数A, Bの**最大公約数**は、A, Bに**共通な素因数の積**である。
 また、**最小公倍数**は、A, Bに**共通な素因数と、共通しない素因数の積**である。

例) 18と60の最大公約数と最小公倍数を求める。

$18 = 2 \times 3 \times 3$ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$... ① 18と60を素因数分解する
 共通な素因数は2, 3 共通しない素因数は3, 2, 5 ... ② 共通する素因数と、共通しない素因数に分ける
 最大公約数は $2 \times 3 = 6$... ③ 共通する素因数の積
 最小公倍数は $2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 180$... ④ 共通する素因数と共通しない素因数の積

【1】次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2y + 12xy + 18y$ 共通な因数 $2y$ をくくり出す
 $= 2y(x^2 + 6x + 9)$
 $= 2y(x+3)^2$

(2) $x^3 - 7x^2 - 8x$ 共通な因数 x をくくり出す
 $= x(x^2 - 7x - 8)$
 $= x(x-8)(x+1)$

(3) $9x^2 - 12x + 4$ $3x$ をひとつの文字と
 考えて公式を使う
 $= (3x)^2 - 2 \times 2 \times 3x + 2^2$
 $= (3x-2)^2$

(4) $(x+1)^2 - 16$ $x+1$ をひとつの文字と
 考えて公式を使う
 $= \{(x+1)+4\} \{(x+1)-4\}$
 $= (x+5)(x-3)$

【2】次の問いに答えなさい。

(1) ①36 ②120をそれぞれ素因数分解しなさい。

① $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$	② $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$	答え①	$2^2 \times 3^2$
$= 2^2 \times 3^2$	$= 2^3 \times 3 \times 5$	②	$2^3 \times 3 \times 5$

(2) 36と120の最大公約数と最小公倍数を、素因数分解を使って求めなさい。

36と120の共通な素因数は、2, 2, 3, 共通でない素因数は、2, 3, 5である。

最大公約数は共通な素因数の積であるから、 $2 \times 2 \times 3 = 12$

最小公倍数は共通な素因数と共通でない素因数の積であるから、 $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 = 360$

答え 最大公約数 12 最小公倍数 360



因数分解(5)

【1】次の式を因数分解しなさい。

$$(1) x^2 + x - 12 \quad \text{和が1, 積が-12になる2数は-3と4}$$

$$= (x - 3)(x + 4)$$

$$(2) x^2 - 9x + 14 \quad \text{和が-9, 積が14になる2数は-2と-7}$$

$$= (x - 2)(x - 7)$$

$$(3) x^2 + 14x + 49$$

$$= x^2 + 2 \times 7 \times x + 7^2$$

$$= (x + 7)^2$$

$$(4) x^2 - 16x + 64$$

$$= x^2 - 2 \times 8 \times x + 8^2$$

$$= (x - 8)^2$$

$$(5) x^2 - 25$$

$$= x^2 - 5^2$$

$$= (x + 5)(x - 5)$$

$$(6) 81 - x^2$$

$$= 9^2 - x^2$$

$$= (9 + x)(9 - x)$$

【2】次の式を因数分解しなさい。

$$(1) x^2 - 4xy - 12y^2 \quad \text{和が-4y, 積が-12y^2になる}$$

$$\quad \quad \quad \text{2数は-6yと2y}$$

$$= (x - 6y)(x + 2y)$$

$$(2) 3x^2y - 3xy - 90y \quad \text{共通因数3yをくくり出す}$$

$$= 3y(x^2 - x - 30)$$

$$= 3y(x - 6)(x + 5)$$

【3】次の数を素因数分解しなさい。

$$(1) 84$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$= 2^2 \times 3 \times 7$$

$$(2) 108$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 2^2 \times 3^3$$

【4】次の問いに答えなさい。

(1) 324 はどのような自然数の2乗になっているか答えなさい。

$$324 \text{ を素因数分解すると, } 324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3^2)^2 = 18^2$$

答え 18

(2) 675 をできるだけ小さな自然数でわって, ある自然数の2乗になるようにする。
どのような自然数でわればよいか答えなさい。

675 を素因数分解すると, $675 = 3^3 \times 5^2$ である。すべての累乗の指数が偶数になるようにすればいいので, 求める自然数は3である。

このとき, $675 \div 3 = 225 = 3^2 \times 5^2 = 15^2$ で, 15 の2乗になっている。

答え 3



因数分解(6)

【1】次の式を因数分解しなさい。

$$(1) x^2 + 5x - 6 \quad \text{和が5, 積が-6になる2数は-1と6}$$

$$= (x-1)(x+6)$$

$$(2) x^2 + 13x + 40 \quad \text{和が13, 積が40になる2数は5と8}$$

$$= (x+5)(x+8)$$

$$(3) x^2 + 8x + 16$$

$$= x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2$$

$$= (x+4)^2$$

$$(4) x^2 - 18x + 81$$

$$= x^2 - 2 \times 9 \times x + 9^2$$

$$= (x-9)^2$$

$$(5) x^2 - 121$$

$$= x^2 - 11^2$$

$$= (x+11)(x-11)$$

$$(6) 36 - x^2$$

$$= 6^2 - x^2$$

$$= (6+x)(6-x)$$

【2】次の式を因数分解しなさい。

$$(1) (x+3)^2 - 8(x+3) + 16 \quad \text{x+3をひとつの文字と}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{考えて公式を使う}$$

$$= \{(x+3) - 4\}^2$$

$$= (x-1)^2$$

$$(2) (x-2)(x+6) + 16 \quad \text{一度式を展開, 整理してから}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{公式を使う}$$

$$= x^2 + 4x - 12 + 16$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

$$= (x+2)^2$$

【3】次の数を素因数分解しなさい。

$$(1) 154$$

$$= 2 \times 7 \times 11$$

$$(2) 168$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$= 2^3 \times 3 \times 7$$

【4】次の問いに答えなさい。

(1) 126と180の最大公約数と最小公倍数を, 素因数分解を使って求めなさい。

126, 180をそれぞれ素因数分解すると, $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
 よって, 最大公約数は $2 \times 3^2 = 18$ 最小公倍数は $2 \times 3^2 \times 7 \times 2 \times 5 = 1260$

答え 最大公約数 18 最小公倍数 1260

(2) 128にできるだけ小さな自然数をかけて, ある自然数の2乗になるようにする。

どのような自然数をかければよいか答えなさい。

128を素因数分解すると, $128 = 2^7$ である。すべての累乗の指数が偶数になるように
 すればいいので, 求める自然数は2である。このとき $128 \times 2 = 2^8 = (2^4)^2 = 16^2$ である。

答え 2

