

2次方程式(1)

2次方程式

(2次式)=0という形になる方程式を2次方程式という。

例) $2x^2+5x+2=0$, $x^2-4=0$ など

x についての2次方程式は、文字 a, b, c を使うと次のように表される。

$$ax^2+bx+c=0$$

2次方程式の解

x についての2次方程式を成り立たせる、 x の^{あた}い値をその方程式の解という。

例) $x^2-4=0$ は、 $x=2, x=-2$ のとき成り立つから、解は、2と-2である。

方程式の解をすべて求めることを、方程式を^と解くという。

因数分解による2次方程式の解き方

$AB=0$ (A, B は数や式) となるとき、 $A=0$ または $B=0$ である。

同じように、2次方程式の左辺を因数分解して $(x-a)(x-b)=0$ という形になれば、 $x-a=0$ または $x-b=0$ であり、解は $x=a, x=b$ である。

※ふつう2次方程式の解は2つあるが、解が1つしかない場合もある。

【1】次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-2)(x-3)=0$

$x-2=0$ または $x-3=0$

$x-2=0$ のとき $x=2$

$x-3=0$ のとき $x=3$

答え $x=2, x=3$

(2) $(x+5)(x-1)=0$

$x+5=0$ または $x-1=0$

$x+5=0$ のとき $x=-5$

$x-1=0$ のとき $x=1$

答え $x=-5, x=1$

(3) $x(x-4)=0$

$x=0$ または $x-4=0$

$x-4=0$ のとき $x=4$

答え $x=0, x=4$

(4) $x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$) 左辺を因数分解する

$x+3=0$ のとき $x=-3$

$x-3=0$ のとき $x=3$

答え $x=\pm 3$

(5) $x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$) 左辺を因数分解する

$x-2=0$ のとき $x=2$

$x-5=0$ のとき $x=5$

答え $x=2, x=5$

(6) $x^2-14x+49=0$

$(x-7)^2=0$) 左辺を因数分解する

$x-7=0$

$x=7$

答え $x=7$



2次方程式(2)

平方根の考え方を使った解き方

次のような形の2次方程式は、平方根の考え方をを使って解くことができる。

① $ax^2+c=0$ の形

例) $x^2-4=0$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -4$ を移項する
 $x^2=4$ $\leftarrow x$ は4の平方根
 $x=\pm 2$

② $(x+a)^2=b$ の形

例) $(x+1)^2=9$ $\leftarrow x+1$ は9の平方根
 $x+1=\pm 3$
 $x+1=3, x+1=-3$
 $x=2, x=-4$

③ $x^2+bx+c=0$ の形

例) $x^2+2x-4=0$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -4$ を移項する
 $x^2+2x=4$
 $x^2+2x+1=4+1$ $\leftarrow \left(\frac{x\text{の係数}}{2}\right)^2$ を両辺に加える
 $(x+1)^2=5$ $\leftarrow x+1$ は5の平方根
 $x+1=\pm\sqrt{5}$
 $x=-1\pm\sqrt{5}$

【1】次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2=64$

$x=\pm\sqrt{64}$ $\leftarrow x$ は64の平方根
 $=\pm 8$

答え $x=\pm 8$

(2) $x^2-15=0$

$x^2=15$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -15$ を移項する
 $x=\pm\sqrt{15}$

答え $x=\pm\sqrt{15}$

(3) $3x^2-21=0$

$3x^2=21$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -21$ を移項する
 $x^2=7$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \text{両辺を3でわる}$
 $x=\pm\sqrt{7}$ $\leftarrow x$ は7の平方根

答え $x=\pm\sqrt{7}$

(4) $(x-1)^2-2=0$

$(x-1)^2=2$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -2$ を移項する
 $x-1=\pm\sqrt{2}$ $\leftarrow x-1$ は2の平方根
 $x=1\pm\sqrt{2}$

答え $x=1\pm\sqrt{2}$

(5) $x^2-2x-14=0$

$x^2-2x=14$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -14$ を移項する
 $x^2-2x+1=14+1$ $\leftarrow \left(\frac{x\text{の係数}}{2}\right)^2$ を両辺に加える
 $(x-1)^2=15$ $\leftarrow x-1$ は15の平方根
 $x-1=\pm\sqrt{15}$
 $x=1\pm\sqrt{15}$

答え $x=1\pm\sqrt{15}$

(6) $x^2+6x=27$

$x^2+6x+9=27+9$ $\leftarrow \left(\frac{x\text{の係数}}{2}\right)^2$ を両辺に加える
 $(x+3)^2=36$ $\leftarrow x+3$ は36の平方根
 $x+3=\pm 6$
 $x+3=6, x+3=-6$
 $x=3, x=-9$

※27を移項して、 $x^2+6x-27=0$ とし、
 $(x-3)(x+9)=0$ と左辺を
 因数分解して解いてもよい

答え $x=3, x=-9$



2次方程式(3)

解の公式を使った解き方

因数分解や平方根の考え方を使っても2次方程式を解けないときには、次の公式を使うことで解を求めることができる。

$$\text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解の公式 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例) $3x^2 - 3x - 1 = 0$

解の公式に $a = 3, b = -3, c = -1$, を代入して $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$

【1】次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 + 6x + 2 = 0$

解の公式に $a = 1, b = 6, c = 2$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \\ &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\ &= -3 \pm \sqrt{7} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{約分をする} \end{aligned}$$

答え $x = -3 \pm \sqrt{7}$

(2) $2x^2 - x - 3 = 0$

解の公式に $a = 2, b = -1, c = -3$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{1 \pm 5}{4} \\ x &= \frac{1-5}{4}, \quad x = \frac{1+5}{4} \end{aligned}$$

答え $x = -1, x = \frac{3}{2}$

(3) $x^2 - 6x + 3 = 0$

解の公式に $a = 1, b = -6, c = 3$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} \\ &= 3 \pm \sqrt{6} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{約分をする} \end{aligned}$$

答え $x = 3 \pm \sqrt{6}$

(4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

解の公式に $a = 2, b = -3, c = -5$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} \\ &= \frac{3 \pm 7}{4} \\ x &= \frac{3-7}{4}, \quad x = \frac{3+7}{4} \end{aligned}$$

答え $x = -1, x = \frac{5}{2}$



2次方程式(4)

【1】次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x-4)=0$

$x+1=0$ または $x-4=0$

答え $x=-1, x=4$

(2) $x(x+5)=0$

$x=0$ または $x+5=0$

答え $x=0, x=-5$

(3) $x^2-x-12=0$
 $(x+3)(x-4)=0$) 左辺を因数分解する

$x+3=0$ または $x-4=0$

答え $x=-3, x=4$

(4) $x^2+12x+36=0$
 $(x+6)^2=0$) 左辺を因数分解する

答え $x=-6$

(5) $2x^2-6x-20=0$
 $x^2-3x-10=0$) 両辺を2でわる
 $(x+2)(x-5)=0$) 左辺を因数分解する
 $x+2=0$ または $x-5=0$

答え $x=-2, x=5$

(6) $x^2-12=0$
 $x^2=12$
 $x=\pm\sqrt{12}$
 $x=\pm 2\sqrt{3}$

答え $x=\pm 2\sqrt{3}$

(7) $5x^2-15=0$
 $5x^2=15$
 $x^2=3$
 $x=\pm\sqrt{3}$

答え $x=\pm\sqrt{3}$

(8) $(x+2)^2-8=0$
 $(x+2)^2=8$
 $x+2=\pm\sqrt{8}$
 $x=-2\pm 2\sqrt{2}$

答え $x=-2\pm 2\sqrt{2}$

(9) $x^2-6x-2=0$
 $x^2-6x=2$
 $x^2-6x+9=2+9$) $(\frac{xの係数}{2})^2$ を両辺に加える
 $(x-3)^2=11$ ← $x-3$ は11の平方根
 $x-3=\pm\sqrt{11}$
 $x=3\pm\sqrt{11}$

答え $x=3\pm\sqrt{11}$

(10) $4x^2-x-5=0$
 解の公式に $a=4, b=-1, c=-5$ を代入して

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 4 \times (-5)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8}$$

答え $x=-1, x=\frac{5}{4}$



2次方程式(5)

【1】 次の方程式を解きなさい。

$$(1) \quad x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x+7)(x-4) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{左辺を因数分解する} \end{array} \right\}$$

答え $x = -7, x = 4$

$$(3) \quad x^2 = 2(3x+8)$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x+2)(x-8) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{式を整理する} \\ \text{左辺を因数分解する} \end{array} \right\}$$

答え $x = -2, x = 8$

$$(5) \quad 9x^2 - 7 = 0$$

$$9x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{7}{9} \quad \left. \begin{array}{l} \text{両辺を9でわる} \\ x \text{は} \frac{7}{9} \text{の平方根} \end{array} \right\}$$

答え $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$(7) \quad x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4 + 4 \quad \left. \begin{array}{l} \left(\frac{x \text{の係数}}{2}\right)^2 \text{を両辺に加える} \end{array} \right\}$$

$$(x-2)^2 = 8 \quad \leftarrow x-2 \text{は} 8 \text{の平方根}$$

$$x-2 = \pm\sqrt{8}$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

答え $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

$$(9) \quad 2x^2 + 8x + 5 = 0$$

解の公式に $a = 2, b = 8, c = 5$ を代入して

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{2}$$

答え $x = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{2}$

$$(2) \quad 2x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-6) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{両辺を2でわる} \\ \text{左辺を因数分解する} \end{array} \right\}$$

答え $x = 1, x = 6$

$$(4) \quad (x+1)(x+9) = 4x$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{式を整理する} \\ \text{左辺を因数分解する} \end{array} \right\}$$

答え $x = -3$

$$(6) \quad (x+3)^2 - 18 = 0$$

$$(x+3)^2 = 18 \quad \leftarrow x+3 \text{は} 18 \text{の平方根}$$

$$x+3 = \pm\sqrt{18}$$

$$x = -3 \pm 3\sqrt{2}$$

答え $x = -3 \pm 3\sqrt{2}$

$$(8) \quad x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x^2 - 2x = 5$$

$$x^2 - 2x + 1 = 5 + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \left(\frac{x \text{の係数}}{2}\right)^2 \text{を両辺に加える} \end{array} \right\}$$

$$(x-1)^2 = 6 \quad \leftarrow x-1 \text{は} 6 \text{の平方根}$$

$$x-1 = \pm\sqrt{6}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{6}$$

答え $x = 1 \pm \sqrt{6}$

$$(10) \quad 5x^2 + 2x - 3 = 0$$

解の公式に $a = 5, b = 2, c = -3$ を代入して

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 5 \times (-3)}}{2 \times 5}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10}$$

答え $x = -1, x = \frac{3}{5}$



2次方程式(6)

【1】 次の方程式を解きなさい。

$$(1) \quad x^2 - 15x + 36 = 0$$

$$(x-3)(x-12) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{左辺を因数分解する}$$

答え $x = 3, x = 12$

$$(2) \quad 5x^2 - 5x - 30 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{両辺を5でわる}$$

$$(x+2)(x-3) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{左辺を因数分解する}$$

答え $x = -2, x = 3$

$$(3) \quad (x+5)(x-7) = -3x+7$$

$$x^2 + x - 42 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{式を整理する}$$

$$(x+7)(x-6) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{左辺を因数分解する}$$

答え $x = -7, x = 6$

$$(4) \quad (x+1)^2 = 12(x-2)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{式を整理する}$$

$$(x-5)^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{左辺を因数分解する}$$

答え $x = 5$

$$(5) \quad 2x^2 - 3 = 0$$

$$2x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{または} \\ = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{または} \\ = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right)$$

答え $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \left(x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

$$(6) \quad (x+6)^2 - 20 = 0$$

$$(x+6)^2 = 20$$

$$x+6 = \pm \sqrt{20}$$

$$x = -6 \pm 2\sqrt{5}$$

答え $x = -6 \pm 2\sqrt{5}$

$$(7) \quad x^2 - 12x + 25 = 0$$

$$x^2 - 12x = -25$$

$$x^2 - 12x + 36 = -25 + 36 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \left(\frac{x \text{の係数}}{2} \right)^2 \text{を両辺に加える}$$

$$(x-6)^2 = 11 \quad \leftarrow x-6 \text{は} 11 \text{の平方根}$$

$$x-6 = \pm \sqrt{11}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{11}$$

答え $x = 6 \pm \sqrt{11}$

$$(8) \quad x^2 + 10x - 3 = 0$$

$$x^2 + 10x = 3$$

$$x^2 + 10x + 25 = 3 + 25 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \left(\frac{x \text{の係数}}{2} \right)^2 \text{を両辺に加える}$$

$$(x+5)^2 = 28 \quad \leftarrow x+5 \text{は} 28 \text{の平方根}$$

$$x+5 = \pm \sqrt{28}$$

$$x = -5 \pm 2\sqrt{7}$$

答え $x = -5 \pm 2\sqrt{7}$

$$(9) \quad 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

解の公式に $a = 3, b = 4, c = -2$ を代入して

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

答え $x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$

$$(10) \quad 5x^2 - 7x + 1 = 0$$

解の公式に $a = 5, b = -7, c = 1$ を代入して

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 5 \times 1}}{2 \times 5}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$$

答え $x = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$

