

2次方程式の活用(1)**解と係数の問題の解法 その1**

2次方程式の1つの解がわかっている、もう1つの解や、係数を求める問題

例) $x^2+ax-10=0$ の1つの解が2のとき、 a の値と、もう1つの解を求めなさい。解答) $x^2+ax-10=0$ に $x=2$ を代入すると、

$$2^2+2a-10=0 \quad \leftarrow \text{① } x \text{ にわかっている解を代入する}$$

$$2a=10-4 \quad \leftarrow \text{② 変形して } a \text{ について解く}$$

$$a=3$$

 $x^2+ax-10=0$ に $a=3$ を代入すると、

$$x^2+3x-10=0 \quad \leftarrow \text{③ 最初の2次方程式に } a \text{ の値を代入して } x \text{ について解く}$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x+5=0 \text{ または } x-2=0$$

$$x=-5, x=2 \text{ よって、もう1つの解は } -5$$

$$\text{答え } a \text{ の値 } \quad \underline{\quad 3 \quad}$$

$$\text{もう1つの解 } \quad \underline{\quad -5 \quad}$$

【1】2次方程式 $x^2+ax-12=0$ の1つの解が2であるとき、次の問いに答えなさい。(1) a の値を求めなさい。 $x^2+ax-12=0$ に $x=2$ を代入すると、

$$2^2+2a-12=0$$

$$2a=12-4$$

$$a=4$$

$$\text{答え} \quad \underline{\quad a=4 \quad}$$

(2) もう1つの解を求めなさい。

 $x^2+ax-12=0$ に $x=4$ を代入すると、

$$x^2+4x-12=0$$

$$(x+6)(x-2)=0$$

$$x+6=0 \text{ または } x-2=0$$

$$x=-6, x=2 \text{ よって、もう1つの解は } -6$$

$$\text{答え} \quad \underline{\quad x=-6 \quad}$$

【2】2次方程式 $x^2+2x+a=0$ の1つの解が3であるとき、 a の値ともう1つの解を求めなさい。 $x^2+2x+a=0$ に $x=3$ を代入すると、

$$3^2+6+a=0$$

$$a=-9-6=-15$$

 $x^2+2x+a=0$ に $a=-15$ を代入すると、

$$x^2+2x-15=0$$

$$(x+5)(x-3)=0$$

$$x+5=0 \text{ または } x-3=0$$

$$x=-5, x=3 \text{ よって、もう1つの解は } -5$$

$$\text{答え } a \text{ の値 } \quad \underline{\quad -15 \quad}$$

$$\text{もう1つの解} \quad \underline{\quad -5 \quad}$$



2次方程式の活用(2)

解と係数の問題の解法 その2

2次方程式の2つの解がわかっている、係数を求める問題

例) $x^2+ax+b=0$ の解が $-2, 3$ であるとき、 a, b の値を求めなさい。

解答) 連立方程式で求める解法

$x^2+ax+b=0$ に $x=-2$ を代入すると、

$$4-2a+b=0 \cdots \textcircled{1}$$

$x^2+ax+b=0$ に $x=3$ を代入すると、

$$9+3a+b=0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立方程式として解くと、

$$a=-1, b=-6$$

$$\begin{array}{r} 9+3a+b=0 \textcircled{2} \\ -) 4-2a+b=0 \textcircled{1} \\ \hline 5+5a \quad = 0 \end{array}$$

$$a=-1$$

①に代入して、 $4+2+b=0$

$$b=-6$$

答え $a=-1, b=-6$

別解) 解が p, q である2次方程式は

$$(x-p)(x-q)=0$$

となることを利用して求める解法

解が $-2, 3$ である2次方程式は、

$$(x+2)(x-3)=0$$

左辺を展開して、

$$x^2-x-6=0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{もとの形と比較する} \\ x^2+ax+b=0 \end{array}$$

よって、 $a=-1, b=-6$

答え $a=-1, b=-6$

【1】2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が $2, 7$ であるとき、 a, b の値を求めなさい。

$x^2+ax+b=0$ に $x=2$ を代入すると、

$$4+2a+b=0 \cdots \textcircled{1}$$

$x^2+ax+b=0$ に $x=7$ を代入すると、

$$49+7a+b=0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立方程式として解くと、

$$a=-9, b=14$$

$$49+7a+b=0 \textcircled{2}$$

$$-) 4+2a+b=0 \textcircled{1}$$

$$\hline 45+5a \quad = 0$$

$$a=-9$$

①に代入して、 $4-18+b=0$

$$b=14$$

答え $a=-9, b=14$

別解) 解が $2, 7$ である2次方程式は、

$$(x-2)(x-7)=0$$

左辺を展開して、

$$x^2-9x+14=0$$

よって、 $a=-9, b=14$

【2】2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が $-3, 6$ であるとき、 a, b の値を求めなさい。

$x^2+ax+b=0$ に $x=-3$ を代入すると、

$$9-3a+b=0 \cdots \textcircled{1}$$

$x^2+ax+b=0$ に $x=6$ を代入すると、

$$36+6a+b=0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立方程式として解くと、

$$a=-3, b=-18$$

$$36+6a+b=0 \textcircled{2}$$

$$-) 9-3a+b=0 \textcircled{1}$$

$$\hline 27+9a \quad = 0$$

$$a=-3$$

①に代入して、 $9+9+b=0$

$$b=-18$$

答え $a=-3, b=-18$

別解) 解が $-3, 6$ である2次方程式は、

$$(x+3)(x-6)=0$$

左辺を展開して、

$$x^2-3x-18=0$$

よって、 $a=-3, b=-18$



2次方程式の活用(3)

2次方程式の文章題の解法

- ① 問題文中の何を文字であらわすのかを決める。
- ② 数量を文字の式で表して方程式をつくり、それを解く。
- ③ 解が問題の条件に合っているかを確認する。

(例えば、長さを解として求める問題で、負の数の解は条件に合わない。)

【1】それぞれを2乗した数の和が25になる連続する2つの自然数がある。

以下の□にあてはまる式または数を入れて、この2つの自然数を求めなさい。

小さいほうの自然数を x とすると、大きいほうの自然数は ㉗ $x + 1$ と表される。

それぞれを2乗した数の和が25になることを式で表すと、

$$\text{㉙ } x^2 + \text{㉗ } (x + 1)^2 = 25 \quad \text{㉙ } (x + 1)^2 \quad \text{㉗ } x^2 \text{ でも可。}$$

展開して整理すると、㉘ $x^2 + x - 12$ = 0 $x^2 + (x + 1)^2 = 25$
 $x^2 + x^2 + 2x + 1 - 25 = 0$ } 展開する

これを解いて、 $(x + 4)(x - 3) = 0$

$x + 4 = 0$ または $x - 3 = 0$

$x = -4, x = 3$

$2x^2 + 2x - 24 = 0$
 $x^2 + x - 12 = 0$ } 両辺を2でわる

x は自然数なので、 $x = \text{㉘ } -4$ は、問題に適していない。

よって、 $x = \text{㉗ } 3$

求める自然数は、㉘ 3 と ㉗ 4 である。
(4) (3)

【2】連続する3つの自然数がある。小さいほうの2つの自然数の積が、3つの自然数の和に5を足したものと等しくなるとき、この3つの自然数を求めなさい。

一番小さい自然数を x とする。

問題文を式で表すと、 $x(x + 1) = x + (x + 1) + (x + 2) + 5$

これを解くと、 $x^2 - 2x - 8 = 0$ ← 展開して整理する

$(x + 2)(x - 4) = 0$

$x + 2 = 0$ または $x - 4 = 0$

$x = -2, x = 4$

x は自然数なので、 $x = -2$ は、問題に適していない。

よって、 $x = 4$ 、3つの自然数は4, 5, 6である。

答え 4, 5, 6



2次方程式の活用(4)

【1】面積が 300cm^2 で、横の長さが縦の長さより 5cm 長い長方形がある。

以下の□にあてはまる式または数を入れて、この長方形の縦の長さを求めなさい。

縦の長さを $x\text{cm}$ とすると、横の長さは $x+5$ cm である。

面積が 300cm^2 なので、 $x(x+5) = 300$

展開して整理すると、 $x^2 + 5x - 300 = 0$

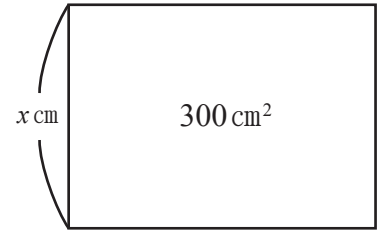
これを解いて、 $(x+20)(x-15) = 0$

$$x = -20, x = 15$$

$x = -20$ は問題に適していない。

よって、 $x = 15$

求める長さは、 15cm である。



【2】右の図のような長方形ABCDで、点Pは点Aを出発して点Bまで秒速 2cm で辺AB上を移動し、点Qは点Bを出発して点Cまで同じ速さで辺BC上を移動する。

以下の□にあてはまる式または数を入れて、三角形PBQの面積が 18cm^2 になるのは点Pが点Aを出発してから何秒後か求めなさい。

点Pが出発してからの時間を x 秒とすると、

$AP = BQ = 2x\text{ cm}$, $BP = (12 - 2x)\text{ cm}$

三角形PBQの面積は、 $\frac{1}{2} \times BQ \times BP = \frac{1}{2} \times 2x(12 - 2x)$

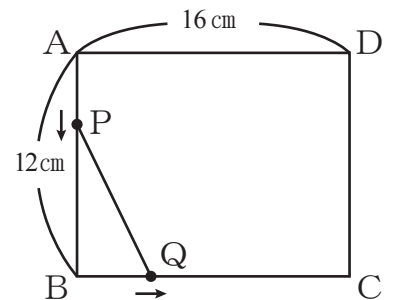
これが 18cm^2 になるので、 $\frac{1}{2} \times 2x(12 - 2x) = 18$

展開して整理すると、 $x^2 - 6x + 9 = 0$

これを解いて、 $(x-3)^2 = 0$

$$x = 3$$

$0 < x < 6$ なので、問題に適している。よって求める答えは 3 秒後である。



2次方程式の活用(5)

【1】2次方程式 $x^2 + ax - 24 = 0$ の1つの解が -3 であるとき、 a の値ともう1つの解を求めなさい。

$$\begin{aligned} x^2 + ax - 24 = 0 \text{ に,} \\ x = -3 \text{ を代入すると,} \\ (-3)^2 - 3a - 24 = 0 \\ 3a = 9 - 24 = -15 \\ a = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{もとの式に } a = -5 \text{ を代入すると,} \\ x^2 - 5x - 24 = 0 \\ (x+3)(x-8) = 0 \\ x = -3, x = 8 \\ \text{よって, もう1つの解は } 8 \end{aligned}$$

答え a の値 -5
 もう1つの解 8

【2】ある自然数と、それに7を足した数の積は60になった。この自然数を求めなさい。

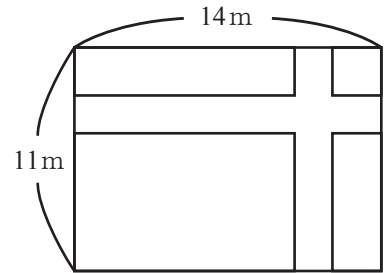
求める自然数を x とする。

$$\begin{aligned} \text{問題文を式で表すと, } x(x+7) = 60 \\ \text{これを解くと, } x^2 + 7x - 60 = 0 \\ (x+12)(x-5) = 0 \\ x = -12, x = 5 \end{aligned}$$

x は自然数なので、
 $x = -12$ は問題に適していない。
 よって、 $x = 5$

答え 5

【3】縦11m、横14mの長方形の土地がある。右の図のように同じ幅の道をつくり、残りの部分を花だんにすると、花だんの面積は 108 m^2 になる。この時の道幅を求めなさい。



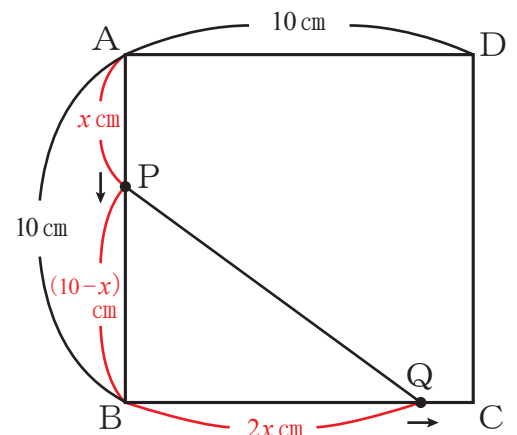
道幅を $x \text{ m}$ とすると、花だんの面積が 108 m^2 だから、

$$\begin{aligned} (11-x)(14-x) = 108 \\ x^2 - 25x + 46 = 0 \\ (x-2)(x-23) = 0 \\ x = 2, x = 23 \end{aligned}$$

$0 < x < 11$ なので、
 $x = 23$ は問題に適していない。
 よって、 $x = 2$

答え 2m

【4】右の図のような正方形ABCDで、点Pは点Aを出発して点Bまで秒速1cmで辺AB上を移動し、点Qは点Bを出発して点Cまで秒速2cmで辺BC上を移動する。



三角形PBQの面積が 21 cm^2 になるのは点Pが点Aを出発してから何秒後か求めなさい。

点Pが出発してからの時間を x 秒とすると、

$$AP = x \text{ cm}, BQ = 2x \text{ cm}, BP = (10 - x) \text{ cm}$$

三角形PBQの面積は、

$$\frac{1}{2} \times BQ \times BP = \frac{1}{2} \times 2x(10 - x) = 10x - x^2$$

これが 21 cm^2 になるので、 $10x - x^2 = 21$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 21 = 0 \\ (x-3)(x-7) = 0 \\ x = 3, x = 7 \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 5$ なので、
 $x = 7$ は問題に適していない。
 よって、 $x = 3$

答え 3秒後



2次方程式の活用(6)

【1】2次方程式 $x^2+x+a=0$ の1つの解が -6 であるとき、 a の値ともう1つの解を求めなさい。

$$\begin{aligned}
 &x^2+x+a=0 \text{ に,} \\
 &x=-6 \text{ を代入すると,} \\
 &(-6)^2-6+a=0 \\
 &a=6-36=-30
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{もとの式に } a=-30 \text{ を代入すると,} \\ x^2+x-30=0 \\ (x+6)(x-5)=0 \\ x=-6, x=5 \end{array} \right\} \text{よって, もう1つの解は } 5$$

答え a の値 -30
 もう1つの解 5

【2】十の位の数が一の位の数よりも5小さい二けたの自然数がある。
 一の位の数と十の位の数との積は、この自然数よりも13小さい。この自然数を求めなさい。
 一の位の数をも x とすると、十の位は $x-5$ 、求める自然数は $10(x-5)+x$ となる。

問題文を式で表すと、 $x(x-5)=10(x-5)+x-13$
 $x^2-5x=10x-50+x-13$

$$\begin{aligned}
 &x^2-16x+63=0 \\
 &(x-7)(x-9)=0 \\
 &x=7, x=9
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{求める自然数は, } x=7 \text{ のとき } 27, x=9 \text{ のとき } 49 \text{ で,} \\ \text{どちらも問題に適している。} \end{array} \right\}$$

答え $27, 49$

【3】横の長さが縦の長さより3cm大きい長方形の紙がある。
 右の図のように、4すみから1辺3cmの正方形を切り取って、
 ふたのない長方形の箱をつくと、体積が 84cm^3 になった。
 もとの長方形の縦の長さを求めなさい。

縦の長さを $x\text{cm}$ とする。

問題文を式で表すと、

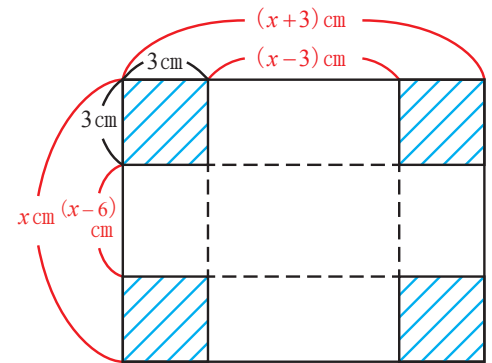
$$3(x-6)(x-3)=84$$

$$x^2-9x-10=0$$

$$(x+1)(x-10)=0$$

$$x=-1, x=10$$

$x=-1$ は問題に適していない。
 よって、 $x=10$



答え 10 cm

【4】右の図のような直角三角形ABCで、点Pは点Aを出発して点Bまで辺AB上を移動し、点Qは点Cを出発して点Bまで点Pと同じ速さで辺BC上を移動する。三角形PBQの面積が 16cm^2 になるのは点Pが何cm動いたときか求めなさい。

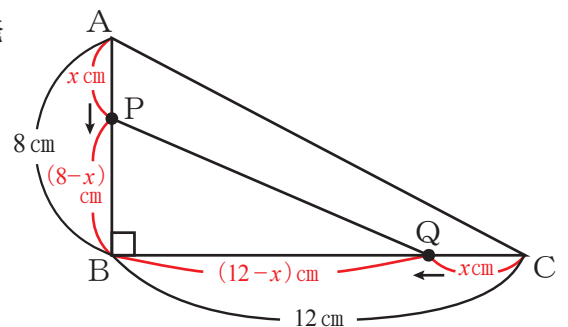
$AP=x\text{ cm}$ とすると、 $BP=(8-x)\text{ cm}$ 、 $BQ=(12-x)\text{ cm}$

問題文を式で表すと、 $\frac{1}{2}(8-x)(12-x)=16$
 $x^2-20x+64=0$

$$(x-4)(x-16)=0$$

$$x=4, x=16$$

$0 \leq x \leq 8$ なので、
 $x=16$ は問題に適していない。
 よって、 $x=4$



答え 4 cm

