中３数学　２次関数

関数 $y=ax^2$（1）

名前

関数 $y=ax^2$

y が x の関数で，$y=ax^2$（a は比例定数）と表せるとき，**y は x の 2 乗に比例する**という。

関数 $y=ax^2$ では，x の値が 2 倍，3 倍になると，y の値は 4 倍，9 倍になる。

例）$y=2x^2$ の x, x^2, y の関係の表

			1 の 2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	…
x	…	1	2	3	4	5	…
x^2	…	1	4	9	16	25	…
y	…	2	8	18	32	50	…
			2 の 4 倍	9 倍	16 倍	25 倍	…

y の値はつねに x^2 の値の 2 倍であり，したがって y は x^2 に比例している。

【１】関数 $y=5x^2$ について，x と y の関係をまとめると右の表のようになった。次の問いに答えなさい。

x	1	2	3	4	5
y	5	①	45	80	②

(1) 表の空らん ①, ② に当てはまる数を求めなさい。

① $y=5x^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=5\times2^2=20$

② $y=5x^2$ に $x=5$ を代入すると，$y=5\times5^2=125$

答え　① 20　② 125

(2) x の値が 4 倍になると，y の値は何倍になるか答えなさい。

関数 $y=ax^2$ では，x の値が n 倍になると，y の値は n^2 倍になる。

答え　16倍

【２】次の ①～⑤のそれぞれについて，y を x の式で表しなさい。また，y が x の 2 乗に比例するものをすべて選び，記号で答えなさい。

① 半径 x cmの円の円周の長さ y cm

式　$y=2\pi x$

② １辺が x cm の正方形の面積 y cm^2

式　$y=x^2$

③ 底辺 10 cm，高さ x cmの三角形の面積 y cm^2

式　$y=5x$

④ 1 辺が x cmの立方体の体積 y cm^3

式　$y=x^3$

⑤ 半径 x cmの円の面積 y cm^2

式　$y=\pi x^2$

答え　②，⑤

中３数学　２次関数

関数 $y=ax^2$ (2)

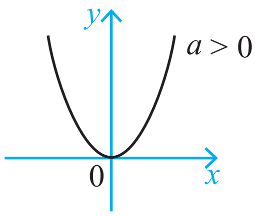
名前

関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴

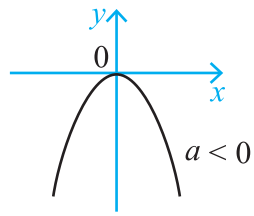
・関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を頂点とする y 軸について対称な放物線となる。

・比例定数 a の値によって開く向きが変わる。

① $a>0$ のとき，上に開いた放物線



② $a<0$ のとき，下に開いた放物線



・a の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さくなる。

関数 $y=ax^2$ のグラフの書き方

グラフを書くときには，通る点をとってから，なめらかな線で結ぶ。

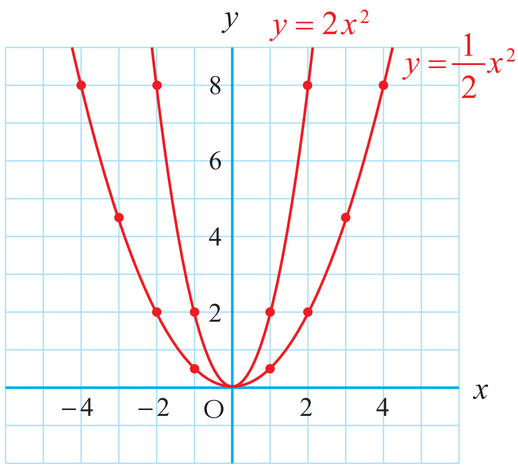
【１】関数 $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 下の表を完成させなさい。

x	1	2	3	4	5
$2x^2$	2	8	18	32	50
$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$

(2) (1) でつくった表をもとに，右の図に

関数 $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフをかきなさい。



【２】y は x の２乗に比例し，$x=3$ のとき $y=18$ である。次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

y は x の2乗に比例するから $y=ax^2$ と表せる。

この式に x, y の値を代入すると，$18=a\times3^2$

$a=2$　したがって，$y=2x^2$

答え　$y=2x^2$

(2) $x=5$ のときの y の値を求めなさい。

$y=2x^2$ に $x=5$ を代入すると，

$y=2\times5^2=50$

答え　$y=50$

【３】(1)～(3) に当てはまる関数を①～④の中からすべて記号で答えなさい。

① $y=3x^2$　② $y=-2x^2$　③ $y=\frac{1}{2}x^2$　④ $y=-\frac{3}{2}x^2$

(1) グラフが上に開いた放物線になる。（ ①，③ ）

(2) グラフが関数 $y=2x^2$ のグラフと x 軸について対称になる。（ ② ）

(3) グラフの開き方が最も大きい。（ ③ ）

定数 a の絶対値が小さいほど，
グラフの開き方は大きくなる。

中３数学　２次関数

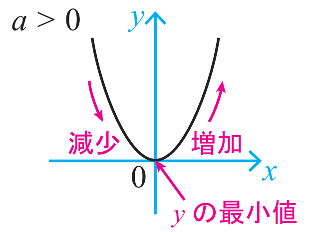
関数 $y=ax^2$ (3)

名前

値の増減

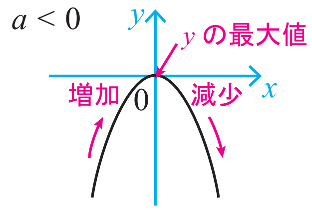
関数 $y=ax^2$ において $a>0$ のとき，次のことがいえる。

x の値が増加するとき，$x<0$ の範囲では，y の値は**減少**し，
$x>0$ の 範囲では，y の値は**増加**する。
$x=0$ のとき，y は**最小値 0** をとる。



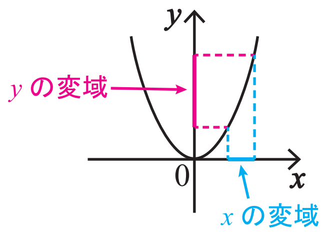
また，$a<0$ のとき，次のことがいえる。

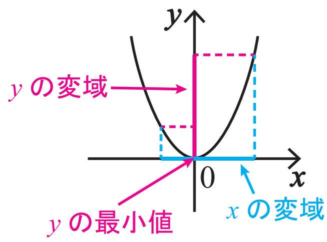
x の値が増加するとき，$x<0$ の範囲では，y の値は**増加**し，
$x>0$ の範囲では，y の値は**減少**する。
$x=0$ のとき，y は**最大値 0** をとる。

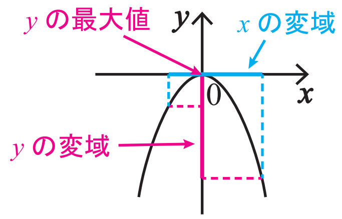


関数 $y=ax^2$ の x の変域と y の変域

x の変域が 0 をふくむ場合，$x=0$ のときに，y の値は最大値または最小値をとる。







【１】(1)～(3) に当てはまる関数を①～④の中からすべて記号で答えなさい。

①$y=2x^2$　　②$y=-5x^2$　　③$y=\frac{5}{2}x^2$　　④$y=-\frac{1}{3}x^2$

(1) $x>0$ の範囲で x の値が増加すると，y の値も増加する。(　① ，③　)

(2) $x=0$ のとき y の値が最大になる。(　② ，④　)

(3) グラフの開き方が最も小さい。(　②　)

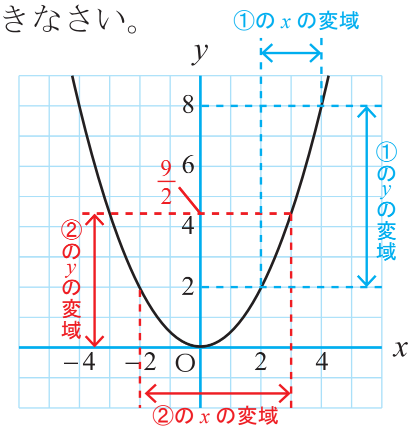
【２】関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ において，以下の①～② の□にあてはまる数を書きなさい。

① x の変域が $2\leqq x\leqq 4$ の場合，

y は，$x=2$ のとき，最小値 ㋐ 2 ，

$x=4$ のとき，最大値 ㋑ 8 をとる。

したがって，y の変域は ㋒ 2 $\leqq y\leqq$ ㋓ 8 である。



② x の変域が $-2\leqq x\leqq 3$ の場合，y は，

$x=3$ のとき，最大値 ㋔ $\frac{9}{2}$ ，$x=0$ のとき，最小値 ㋕ 0 をとる。

したがって，y の変域は ㋖ 0 $\leqq y\leqq$ ㋗ $\frac{9}{2}$ である。

x の変域が 0 をふくむので，
x = 0 のとき
y の値が最小値をとる。

中３数学　２次関数

関数 $y=ax^2$ (4)

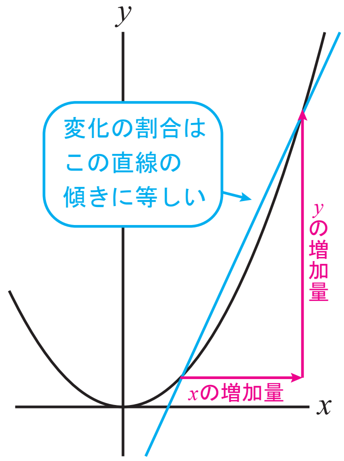
名前

関数 $y=ax^2$ の変化の割合

変化の割合は次の式で求められる。(変化の割合) $= \dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$

変化の割合はグラフ上の２点を結ぶ直線の傾きに等しい。

関数 $y=ax^2$ の変化の割合は関数 $y=ax$ の場合と違って一定ではない。



平均の速さ

斜面を転がるボールなどの x 秒間に進む距離を y m とすると，

平均の速さは，$\dfrac{(\text{進んだ距離})}{(\text{進んだ時間})}$ (m/s) である。

$y=ax^2$ が成り立つとき，平均の速さは変化の割合に等しい。

【１】関数 $y=3x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 1 から 3 まで

$x=1$ のとき $y=3$, $x=3$ のとき $y=27$

変化の割合は $\dfrac{27-3}{3-1}=12$

答え　12

(2) -5 から -2 まで

$x=-5$ のとき $y=75$, $x=-2$ のとき $y=12$

変化の割合は $\dfrac{12-75}{-2-(-5)}=-21$

答え　-21

【２】関数 $y=-2x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) -3 から -1 まで

$x=-3$ のとき $y=-18$, $x=-1$ のとき $y=-2$

変化の割合は $\dfrac{-2-(-18)}{-1-(-3)}=8$

答え　8

(2) 4 から 7 まで

$x=4$ のとき $y=-32$, $x=7$ のとき $y=-98$

変化の割合は $\dfrac{-98-(-32)}{7-4}=-22$

答え　-22

【３】ボールが斜面を転がりはじめてから，x 秒間に進む距離を y m とすると，$y=2x^2$ の関係が成り立った。次の問いに答えなさい。

(1) 下の表を完成させなさい。

x (秒)	0	1	2	3	4	5	6
y (m)	0	2	8	18	32	50	72

(2) 1 秒間ごとの平均の速さを，転がりはじめてから，4 秒後までについて求めなさい。

平均の速さは $\dfrac{(\text{進んだ距離})}{(\text{進んだ時間})}$ (m/s) だから，

0 秒後〜 1 秒後 $\dfrac{2-0}{1-0}=2$ (m/s)　2 秒後〜3 秒後 $\dfrac{18-8}{3-2}=10$ (m/s)

1 秒後〜2 秒後 $\dfrac{8-2}{2-1}=6$ (m/s)　3 秒後〜4 秒後 $\dfrac{32-18}{4-3}=14$ (m/s)

0 秒後〜 1 秒後　2 m/s

1 秒後〜 2 秒後　6 m/s

2 秒後〜 3 秒後　10 m/s

3 秒後〜 4 秒後　14 m/s

中３数学　２次関数

関数 $y=ax^2$ (5)

名前

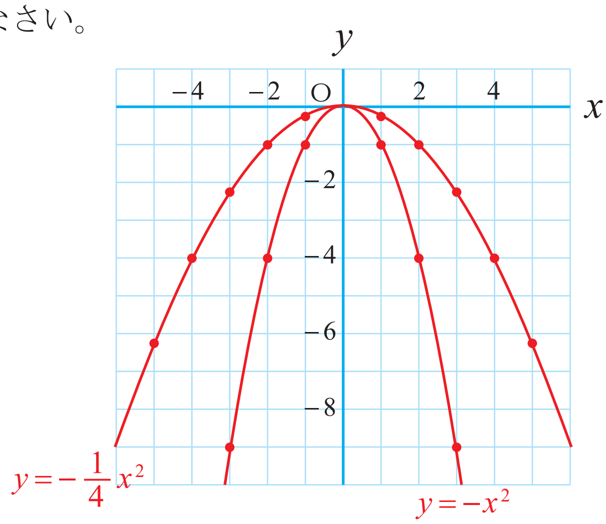
【１】関数 $y=-x^2$, $y=-\frac{1}{4}x^2$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 下の表を完成させなさい

x	1	2	3	4	5
$-x^2$	-1	-4	-9	-16	-25
$-\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	$-\frac{25}{4}$

(2) (1) でつくった表をもとに，右の図に

関数 $y=-x^2$, $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフをかきなさい。



【２】関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $-6 \leqq x \leqq -3$

y の値は，$x=-6$ のとき最大値 18，

$x=-3$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

したがって，$\frac{9}{2} \leqq y \leqq 18$

答え　$\frac{9}{2} \leqq y \leqq 18$

(2) $-1 \leqq x \leqq 5$

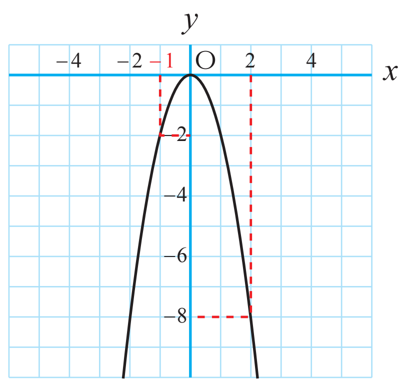
y の値は，$x=5$ のとき最大値 $\frac{25}{2}$，

$x=0$ のとき最小値 0 をとる。

したがって，$0 \leqq y \leqq \frac{25}{2}$

答え　$0 \leqq y \leqq \frac{25}{2}$

【３】右の図は関数 $y=ax^2$ のグラフである。次の問いに答えなさい。



(1) この関数の式を求めなさい。

点 $(1, -2)$ を通っているので，$-2=a\times 1^2$

$a=-2$　よって，$y=-2x^2$

答え　$y=-2x^2$

(2) x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

y の値は，$x=2$ のとき最小値 -8，

$x=0$ のとき最大値 0 をとる。

したがって，$-8 \leqq y \leqq 0$　答え　$-8 \leqq y \leqq 0$

(3) グラフがこの関数と x 軸について対称になる関数の式を答えなさい。

定数 a の絶対値が等しく符号が異なる関数のグラフは x 軸について対称になる。

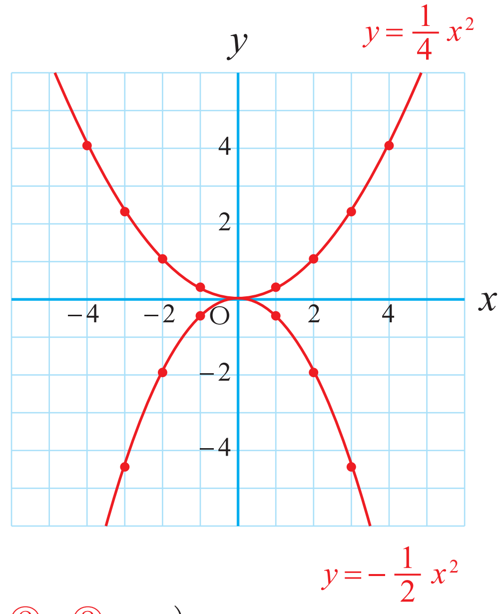
答え　$y=2x^2$

中３数学　２次関数

関数 $y=ax^2$ (6)

名前

【１】右の図に関数 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフを書き入れなさい。



【２】次の①から④の関数について，次の問いに記号で答えなさい。

①$y=\frac{2}{3}x^2$　②$y=-3x^2$　③$y=5x^2$　④$y=-\frac{1}{5}x^2$

(1) グラフの開き方が大きい順に並べなさい。（　④，①，②，③　）

(2) $x>0$ の範囲で x の値が増加すると y の値が減少するものをすべて選びなさい。(　②，④　)

(3) $x=0$ のとき y の値が最小になるものをすべて選びなさい。(　①，③　)

【３】関数 $y=ax^2$ で，x の変域が $-1\leqq x\leqq 6$ のとき y の変域が $-54\leqq y\leqq 0$ である。a の値を求めなさい。

y の最大値が 0 であることより，$a<0$ である。

$x=6$ のとき y が最小値 -54 をとるので，

a の値を求めると，$-54=a\times 6^2$

$a=-\frac{3}{2}$

答え　$a=-\frac{3}{2}$

【4】関数 $y=ax^2$ のグラフが点 $(2, 12)$ を通るとき，以下の問いに答えなさい。

(1) a の値を求めなさい。

点 $(2, 12)$ を通っているので，$12=a\times 2^2$

$a=3$

答え　$a=3$

(2) このグラフが点 $(-1, b)$ を通るとき，b の値を求めなさい。

$a=3$ なので，$y=3x^2$

$x=-1$，$y=b$を代入して，$b=3\times(-1)^2=3$

答え　$b=3$

(3) x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

$x=1$ のとき $y=3$，$x=3$ のとき $y=27$

変化の割合は $\frac{27-3}{3-1}=12$

答え　12