

いろいろな事象と関数(1)

いろいろな事象と関数

身の回りのいろいろな事象の中には、関数 $y = ax^2$ や関数 $y = bx + c$ など表せるものがある。また、関数の中には、 y の値がとびとびになるような、式で表すことができないものもある。

【1】ボールがある高さから落下するとき、落下し始めてから x 秒で落下する距離を y m とすると、 x と y の間にはおよそ $y = 5x^2$ という関係が成り立つ。次の問いに答えなさい。

(1) ボールが落下し始めてから 5 秒間でおよそ何m落下するか求めなさい。

$y = 5x^2$ に $x = 5$ を代入すると、 $y = 5 \times 5^2 = 125$

答え 125m

(2) ボールが落下し始めて 1 秒後から 3 秒後の平均の速さを求めなさい。

$y = 5x^2$ に $x = 1$ を代入すると $y = 5 \times 1^2 = 5$

$x = 3$ を代入すると $y = 5 \times 3^2 = 45$

平均の速さは $\frac{\text{(進んだ距離)}}{\text{(進んだ時間)}}$ (m/s) だから、

$\frac{45 - 5}{3 - 1} = 20$ (m/s)

答え 20 (m/s)

【2】下の表はある駐車場の駐車時間と駐車料金の関係を示したものである。次の問いに答えなさい。

駐車時間	1時間 まで	2時間 まで	3時間 まで	4時間 まで	以降は、1時間 増えるごとに 100円加算
駐車料金(円)	400	700	900	1000	

(1) 駐車時間を x 時間、駐車料金を y 円とすると、 y は x の関数であり、 x の変域が $0 < x \leq 3$ のときをグラフで表すと右の図のようになる。

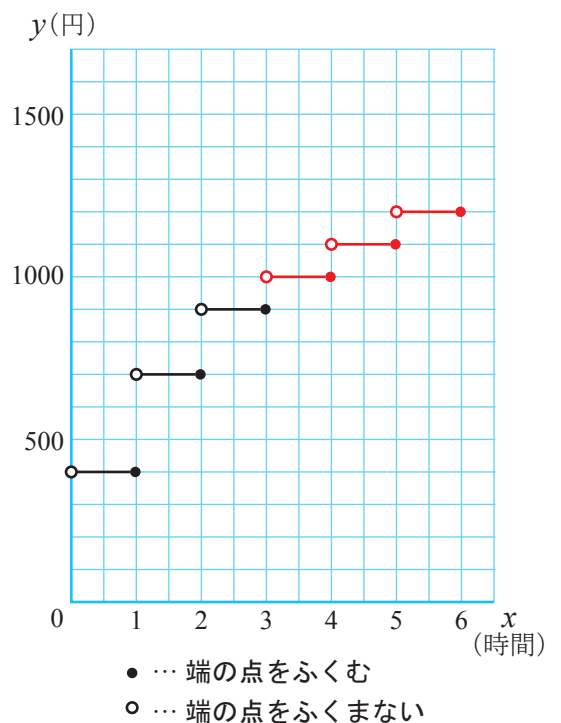
x の変域が $3 < x \leq 6$ のときのグラフを図に書きなさい。

(2) 3時間30分駐車した時の駐車料金を答えなさい。

答え 1000円

(3) 1200円持っているとするとき何時間まで駐車できるか答えなさい。

答え 6時間まで



いろいろな事象と関数(2)

関数 $y=ax^2$ と関数 $y=bx+c$ の交点

関数 $y=ax^2$ と関数 $y=bx+c$ の交点の座標の値は、二つの式をどちらも成り立たせる。
 よって、交点の x 座標は、2つの式を連立方程式として解くことで求めることができる。

【1】以下の□にあてはまる式または数を入れて、関数 $y=x^2$ と関数 $y=4x$ のグラフの交点の座標を求めなさい。

$$\begin{cases} y=x^2 \cdots \textcircled{1} \\ y=4x \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{とおく。}$$

①を②に代入すると、 $\textcircled{7} x^2 = 4x$
 $x^2 - 4x = 0$

左辺を因数分解すると、 $x(x-4) = 0$
 $x = \textcircled{1} 0$ または $\textcircled{7} x-4 = 0$
 $x = 0, x = 4$

①に $x=0$ を代入すると、

$$y = \textcircled{5} 0$$

①に $x=4$ を代入すると、

$$y = \textcircled{オ} 16$$

よって交点の座標は、 $(0, 0), (4, 16)$

【2】関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ と関数 $y=x+4$ のグラフの交点の座標を求めなさい。

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1} \\ y=x+4 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{とおく。}$$

①を②に代入すると、 $\frac{1}{2}x^2 = x+4$
 式を整理して、 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 左辺を因数分解すると、 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x+2=0$ または $x-4=0$
 $x = -2, x = 4$

②に $x=-2$ を代入すると、

$$y = 2$$

②に $x=4$ を代入すると、

$$y = 8$$

よって交点の座標は、 $(-2, 2), (4, 8)$

答え $(-2, 2), (4, 8)$

【3】右の図のように、関数 $y=2x^2$ のグラフ上に2点P, Qがある。

次の問いに答えなさい。

(1) 点P, Qの座標を求めなさい。

$y=2x^2$ に $x=-1$ を代入すると、 $y=2$

$y=2x^2$ に $x=2$ を代入すると、 $y=8$

答え 点P $(-1, 2)$ 点Q $(2, 8)$

(2) 直線PQの式を求めなさい。

直線PQの傾きは $\frac{8-2}{2-(-1)} = 2$
 傾き
 $y=2x+b$ に $x=2, y=8$ を代入すると、
 $8=4+b$ 点Qの座標
 $b=4$

よって求める式は $y=2x+4$

別解) $y=ax+b$ に

2点の座標を代入すると、

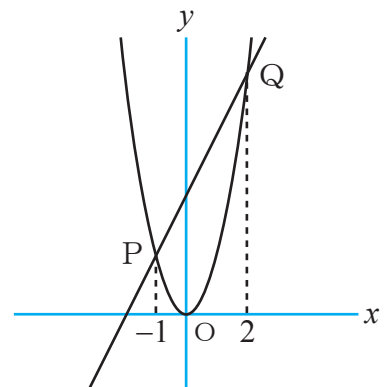
$$-a+b=2 \cdots \textcircled{1}$$

$$2a+b=8 \cdots \textcircled{2}$$

これを連立方程式として解くと、 $a=2, b=4$

よって求める式は $y=2x+4$

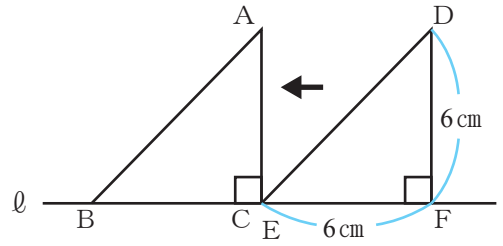
答え $y=2x+4$



いろいろな事象と関数(3)

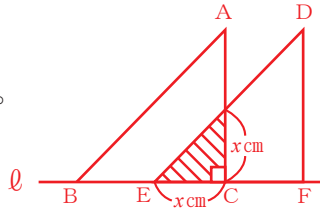
【1】右の図のように辺BCと辺EFが直線ℓ上にあり、頂点C,Eが重なった、合同な直角二等辺三角形△ABCと△DEFがある。

△ABCを固定し、直線ℓ上で△DEFの頂点Eが点Bに重なるまで秒速1cmで移動させる。頂点Eが点Cを出発してからx秒後に、△ABCと△DEFが重なる部分の面積をy cm²とする。



(1) x と y の関係を式で表しなさい。

重なった部分は、右図のような直角二等辺三角形になる。



答え $y = \frac{1}{2}x^2$

(2) 重なった部分の面積が 8cm² になるのは何秒後か求めなさい。

式に $y=8$ を代入すると、 $8 = \frac{1}{2}x^2$
 $x^2 = 16$ $x = \pm 4$
 $x > 0$ より、 $x = 4$

答え 4秒後

【2】まっすぐな道路と、その横に平行に走る線路がある。電車が駅を出発してからx秒間に進む距離をy mとすると、 $0 \leq x \leq 50$ の間ではyはxの2乗に比例する。

x と y の関係は右のグラフのようになる。

(1) x と y の関係を式で表しなさい。

グラフが点(30, 300)を通っていることから

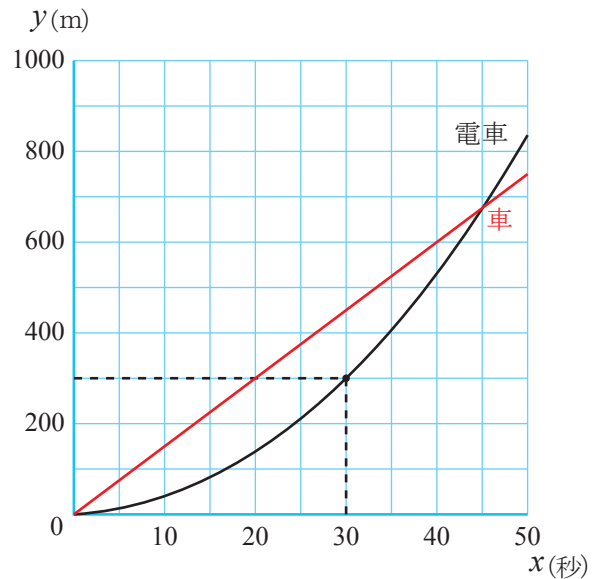
$y = ax^2$ に $x = 30, y = 300$ を代入すると

$300 = a \times 30^2 = a \times 900$

$a = \frac{1}{3}$ よって $y = \frac{1}{3}x^2$

答え

$y = \frac{1}{3}x^2$



(2) 電車が駅を出発するのと同時に、秒速15mで走る車が駅の横を通過した。車が駅の横を通過してからx秒間に進む距離をy mとして、yをxの式で表しなさい。

また、このグラフを図に書き入れなさい。

y を x の式で表すと $y = 15x$

答え $y = 15x$

(3) 電車が車に追いつくのは電車が駅を出発してから何秒後か、また駅から何m進んだところか求めなさい。

$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \dots \textcircled{1} \\ y = 15x \dots \textcircled{2} \end{cases}$

とおく。

①を②に代入すると、 $\frac{1}{3}x^2 = 15x$

式を整理して、 $x^2 - 45x = 0$

左辺を因数分解すると、 $x(x - 45) = 0$

$x = 0$ または $x - 45 = 0$

$x = 0, x = 45$

よって、電車が車に追いつくのは45秒後。

②に $x = 45$ を代入して、 $y = 15 \times 45 = 675$

答え 45秒後 675 m



いろいろな事象と関数(4)

【1】ボールが斜面を転がり始めてから、 x 秒間に進む距離を y mとすると、 $y=3x^2$ の関係が成り立った。次の問いに答えなさい。

(1) ボールが転がり始めてから4秒間で何m進むか求めなさい。

$y=3x^2$ に $x=4$ を代入すると、 $y=3 \times 4^2=48$

答え 48m

(2) 次の場合のボールの平均の速さを求めなさい。

① 転がり始めてから3秒後まで

$y=3x^2$ に $x=3$ を代入すると、 $y=3 \times 3^2=27$

平均の速さは $\frac{\text{進んだ距離}}{\text{進んだ時間}}$ (m/s) だから、

$\frac{27-0}{3-0}=9$ (m/s)

答え 9 m/s

② 2秒後から5秒後まで

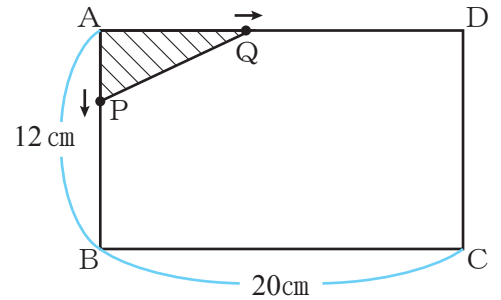
$y=3x^2$ に $x=2$ を代入すると、 $y=3 \times 2^2=12$

$y=3x^2$ に $x=5$ を代入すると、 $y=3 \times 5^2=75$

$\frac{75-12}{5-2}=21$ (m/s)

答え 21 m/s

【2】右の図のような長方形ABCDで、点P、Qが頂点Aを同時に出発する。点Pは辺AB上を頂点Bまで秒速1cmで動き、点Qは辺AD上を頂点Dまで秒速2cmで動く。点Qが頂点Dに着くと点Pも止まるものとする。点P、Qが頂点Aを出発してから x 秒後の $\triangle APQ$ の面積を y cm²とすると、次の問いに答えなさい。



(1) y を x の式で表しなさい。また x の変域を求めなさい。

$AP=x$, $AQ=2x$ なので、 $y=\frac{1}{2}x \times 2x=x^2$

点Qが頂点Dに着くのは10秒後なので、 $0 \leq x \leq 10$

式 $y=x^2$

x の変域 $0 \leq x \leq 10$

(2) $\triangle APQ$ の面積が 64 cm² になるのは頂点Aを出発した何秒後か求めなさい。

$y=x^2$ に $y=64$ を代入すると、 $64=x^2$

$x=\pm 8$

変域より $x=-8$ は不適。

答え 8秒後

【3】右の図のように、関数 $y=-\frac{1}{3}x^2 \cdots$ ①、 $y=-x-6 \cdots$ ② のグラフが2点A、Bで交わっている。また、直線②と y 軸との交点をCとする。

(1) 点A、Bの座標を求めなさい。

①を②に代入して整理すると、 $x^2-3x-18=0$

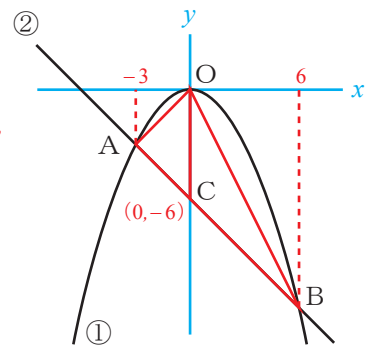
左辺を因数分解すると、 $(x+3)(x-6)=0$

$x+3=0$ または $x-6=0$

$x=-3$, $x=6$

答え 点A(-3, -3) 点B(6, -12)

②に $x=-3$ を代入して、
 $y=-(-3)-6=-3$
②に $x=6$ を代入して、
 $y=-6-6=-12$



(2) $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ の面積を求めなさい。

②に $x=0$ を代入して、 $y=-0-6=-6$ よって、点Cの座標は(0, -6), $OC=6$

三角形の底辺をOCとすると、高さはそれぞれ点A、Bの x 座標の絶対値に等しい。

よって、 $\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ $\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

答え $\triangle OAC$ 9 $\triangle OBC$ 18



いろいろな事象と関数(5)

【1】自動車のブレーキがききはじめてから停止するまでに走る距離を制動距離という。自動車の速度を時速 x km, 制動距離を y m とすると, y は x の2乗に比例する。ある車では時速 20 km のときの制動距離が 4 m である。この車の時速 50 km のときの制動距離を求めなさい。

y は x の2乗に比例しているので, $y = ax^2$ と表すことができる。

この式に $x = 20, y = 4$ を代入すると,

$$4 = a \times 20^2 = a \times 400$$

$$a = \frac{1}{100} \text{ したがって, } y = \frac{1}{100} x^2$$

$$\text{この式に } x = 50 \text{ を代入すると, } y = \frac{1}{100} \times 50^2 = 25$$

答え 25m

【2】下の表はある鉄道路線の乗車距離 x km と運賃 y 円の関係を示したものである。

乗車距離	2 km まで	4 km まで	6 km まで	9 km まで	13 km まで
運賃(円)	120	150	180	220	270

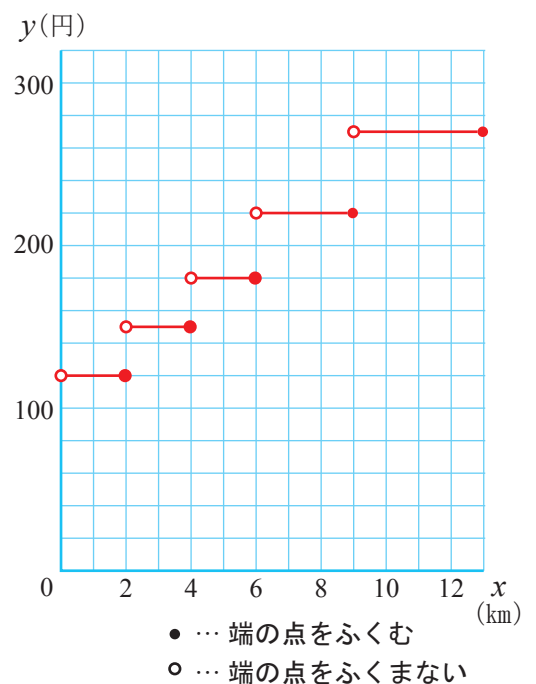
(1) 右の図に x と y の関係のグラフを書き入れなさい。

(2) 7 km 乗車した時の運賃は何円ですか。

答え 220 円

(3) 200 円では何 km まで乗車できますか。

答え 6 km



【3】右の図のように, 関数 $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$, $y = -x + 4 \cdots \textcircled{2}$ のグラフが

2点A, Bで交わっている。また, 直線②と x 軸との交点をCとする。

(1) 点A, Bの座標を求めなさい。

①を②に代入して整理すると, $x^2 + 2x - 8 = 0$

これを解くと, $(x+4)(x-2) = 0$

$$x = -4, x = 2$$

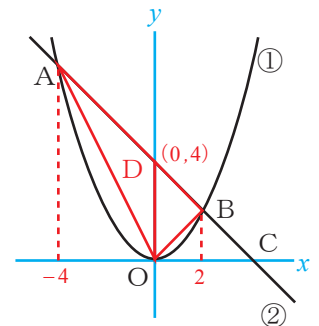
②に $x = -4$ を代入して,

$$y = -(-4) + 4 = 8$$

②に $x = 2$ を代入して,

$$y = -2 + 4 = 2$$

答え 点A (-4, 8) 点B (2, 2)



(2) $\triangle AOB$ の面積を求めなさい。

直線②と y 軸との交点をDとすると,

②に $x = 0$ を代入して, $y = -0 + 4 = 4$ よって, 点Dの座標は(0, 4), $OD = 4$

三角形の底辺をODとすると, 高さはそれぞれ点A, Bの x 座標の絶対値に等しい。

$$\text{よって, } \triangle OAD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \quad \triangle OBD = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

$$\triangle OAB = \triangle OAD + \triangle OBD = 8 + 4 = 12$$

答え 12

