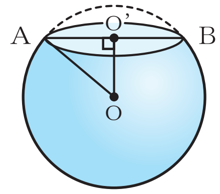
中３数学　三平方の定理

空間図形への活用（1）

名前

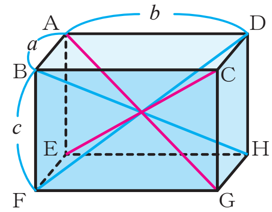
球への活用

三平方の定理を利用して円の弦の長さを求めるのと同様に，球を平面で切った切り口の円の直径を求めることができる。

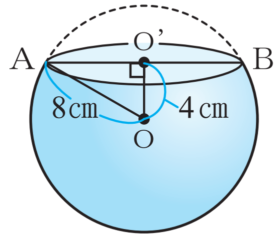


直方体の対角線とその長さ

右の図の直方体で，線分AG, BH, CE, DF は，いずれもこの直方体の**対角線**であり，その長さはすべて等しい。
縦，横，高さが，それぞれ a, b, c の直方体の対角線の長さは，
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ である。



【１】右の図のように，半径 8 cmの球を，中心O からの距離が 4 cmの平面で切った。□をうめて，切り口の円O'の直径AB の長さを求めなさい。



ΔOAO'はOAを斜辺とする直角三角形なので，

三平方の定理より，　$OA^2 = (AO')^2 + (OO')^2$

$8^2 = (AO')^2 + 4^2$

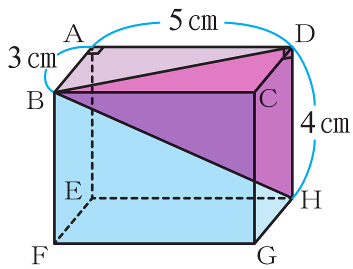
$(AO')^2 =$ ㋐ 48

AO' > 0 だから，AO' = ㋑ $4\sqrt{3}$

O'はAB の中点だから，AB ＝2AO' ＝ ㋒ $8\sqrt{3}$ （cm）

【２】□をうめて，次の問いに答えなさい。

（1）右の図の直方体で，AB ＝3 cm，AD＝5 cm，DH＝4 cm であるとき，対角線 BHの長さを求めなさい。



ΔBDHはBHを斜辺とする直角三角形なので，

$BH^2 = BD^2 + DH^2$　……①

ΔABDで，$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 5^2 =$ ㋓ 34 ……②

①,②より，　$BH^2 = 34 + DH^2 = 34 + 4^2 =$ ㋔ 50

BH > 0 だから，BH = ㋕ $5\sqrt{2}$ （cm）

（2）1 辺が 3 cmの立方体の対角線の長さを求めなさい。

直方体の対角線の長さ ＝$\sqrt{(縦)^2 + (横)^2 + (高さ)^2}$ であるから，求める対角線の長さを

x cmとすると，$x = \sqrt{3^2+3^2+3^2}$ ＝ ㋖ $3\sqrt{3}$

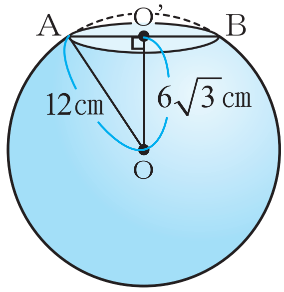
よって対角線の長さは，㋗ $3\sqrt{3}$ cm である。

中３数学　三平方の定理

空間図形への活用（2）

名前

【１】右の図のように，半径 12 cmの球を，中心Ｏ からの距離が $6\sqrt{3}$ cmの平面で切った。切り口の円Ｏ’の直径ABの長さを求めなさい。



$12^2 = (AO')^2 + (6\sqrt{3})^2$

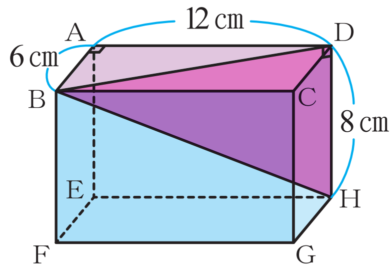
$(AO')^2 = 36$

AO’>0 だから，AO’＝6

AB ＝2AO’＝12（cm）

答え　12 cm

【２】右の図の直方体で，AB＝6cm，AD＝12 cm，DH＝8cm であるとき，対角線BHの長さを求めなさい。



ΔABDで，$BD^2 = 6^2 + 12^2 = 180$

ΔBDHで，$BH^2 = BD^2 + DH^2 = 180 + 8^2 = 244$

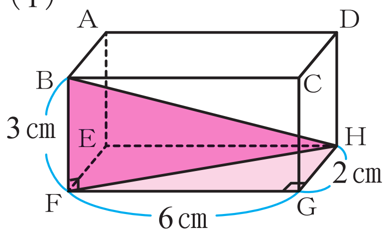
BH>0 だから，$BH = 2\sqrt{61}$（cm）

別解）　$BH = \sqrt{6^2+12^2+8^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$（cm）

答え　$2\sqrt{61}$ cm

【３】下の図の直方体の対角線の長さを求めなさい。

（1）



ΔFGHで，$FH^2 = 6^2 + 2^2 = 40$

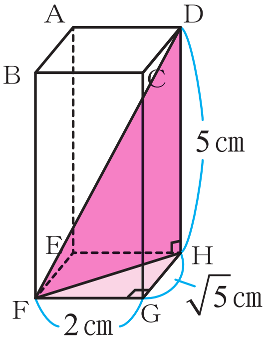
ΔBFHで，$BH^2 = BF^2 + FH^2 = 3^2 + 40 = 49$

BH>0 だから，BH＝7

別解）　$BH = \sqrt{2^2+6^2+3^2} = \sqrt{49} = 7$（cm）

答え　7 cm

（2）



ΔFGHで，$FH^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$

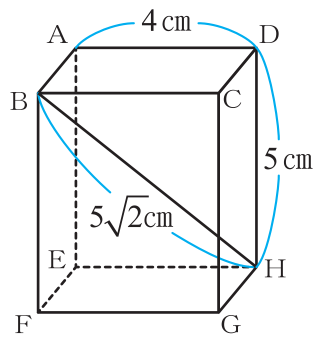
ΔDFHで，$DF^2 = DH^2 + FH^2 = 5^2 + 9 = 34$

DF>0 だから，$DF = \sqrt{34}$（cm）

別解）　$DF = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2+5^2} = \sqrt{34}$（cm）

答え　$\sqrt{34}$ cm

【４】右の図の直方体で，AD＝4 cm，DH＝5 cm，$BH = 5\sqrt{2}$ cmであるとき，辺ABの長さを求めなさい。



$BH = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DH^2}$

$BH^2 = AB^2 + AD^2 + DH^2$

$AB^2 = BH^2 - AD^2 - DH^2 = (5\sqrt{2})^2 - 4^2 - 5^2 = 9$

AB>0 だから，AB＝3（cm）

答え　3 cm

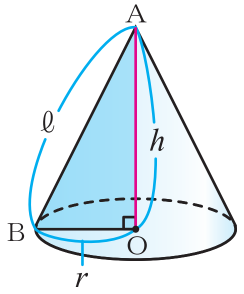
中３数学　三平方の定理

空間図形への活用(3)

名前

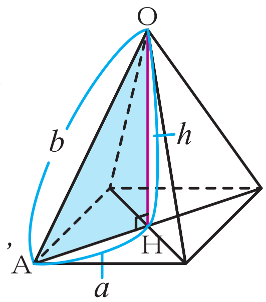
円錐（えんすい）への活用

右の図のような円錐で，
底面の半径を r,
母線の長さを ℓ,
高さを h とすると，
ΔABOは直角三角形なので，
$\ell^2 = r^2 + h^2$ が成り立つ。



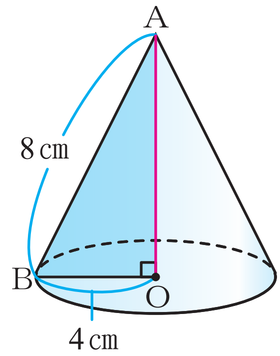
正四角錐への活用

右の図のような正四角錐で，
AH $= a$, OA $= b$,
高さを h とすると，
ΔOAHは直角三角形なので，
$b^2 = a^2 + h^2$ が成り立つ。



【１】 □をうめて，次の問いに答えなさい。

(1) 底面の半径が 4 cm，母線の長さが 8 cmの円錐の高さを求めなさい。



頂点Aから底面に垂線AOをひくと，Oは底面の円の中心であり，求める高さはAOの長さである。

ΔABOは直角三角形なので，

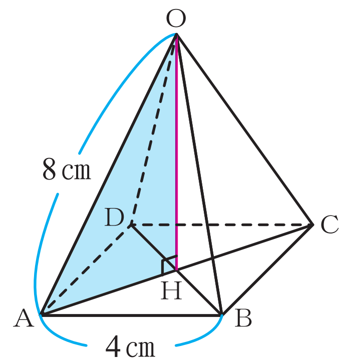
$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2$

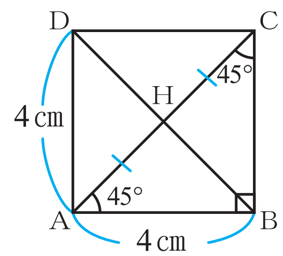
$\mathrm{AO}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BO}^2 = 8^2 - 4^2 =$ ㋐ 48

AO > 0 だから，AO = ㋑ $4\sqrt{3}$ (cm)

よって円錐の高さは，㋒ $4\sqrt{3}$ cm である。

(2) 底面が１辺 4 cmの正方形，側面の辺OAの長さが 8 cmの正四角錐の高さを求めなさい。





頂点Oから底面に垂線OHをひくと，Hは底面の正方形の対角線ACの中点であり，求める高さはOHの長さである。

まず対角線ACの長さを求める。

ΔABCは直角二等辺三角形なので，

AB : AC = 1 : ㋓ $\sqrt{2}$

AC = AB × $\sqrt{2}$ = ㋔ $4\sqrt{2}$ (cm)

次にACの値から,AHの長さを求める。

AH = AC ÷ 2 = $4\sqrt{2} \div 2$ = ㋕ $2\sqrt{2}$ (cm)

ΔOAHは直角三角形なので，三平方の定理を使ってOHの長さを求める。

ΔOAHで，$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{OH}^2$

$\mathrm{OH}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2 = 8^2 - (2\sqrt{2})^2 =$ ㋖ 56

OH > 0 だから，OH = ㋗ $2\sqrt{14}$ (cm)

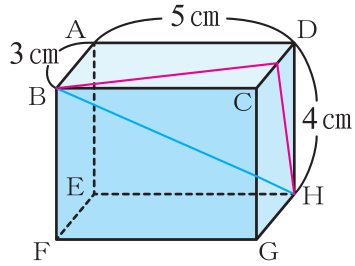
よって求める高さは，㋘ $2\sqrt{14}$ cm である。

中３数学　三平方の定理

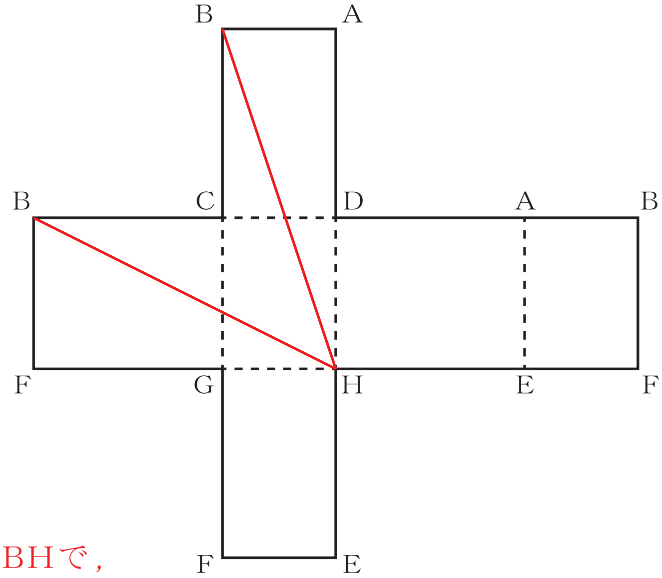
空間図形への活用（4）

名前

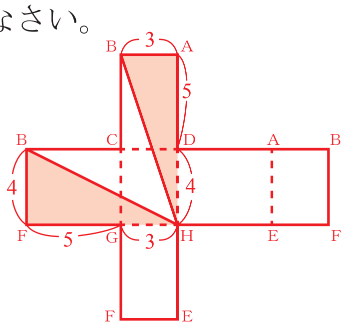
【１】右の図の直方体に，点Ｂから点Ｈまで糸をかける。
次の問いに答えなさい。



（1）辺CDを通ってかける場合と，辺CGを通ってかける場合の２通りのかけかたで，糸の長さがそれぞれもっとも短くなるときの糸のようすを右下の展開図にかき入れなさい。



（2）（1）の２通りのかけかたをしたときの，糸の長さをそれぞれ求めなさい。
また，辺CDと辺CGのどちらを通ってかけるほうが，より短いといえるか答えなさい。



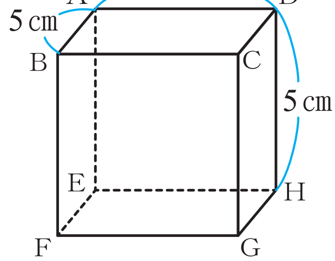
辺CDを通ってかける場合，上の展開図の$\triangle$ABHで，
$BH^2 = AB^2 + AH^2 = 3^2 + (5+4)^2 = 90$
$BH>0$ だから，$BH = 3\sqrt{10}$（cm）

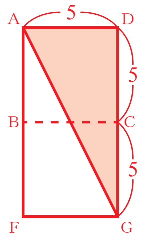
辺CGを通ってかける場合，上の展開図の$\triangle$BFHで，
$BH^2 = BF^2 + FH^2 = 4^2 + (5+3)^2 = 80$
$BH>0$ だから，$BH = 4\sqrt{5}$（cm）

辺CDを通る糸の長さ　$3\sqrt{10}$ cm　　辺CGを通る糸の長さ　$4\sqrt{5}$ cm

答え　辺CGを通ってかけるほうが短いといえる。

【２】右の図の１辺が５cmの立方体に，点Ａから辺BCを通って点Ｇまで糸の長さがもっとも短くなるように糸をかけた。
このときの，糸の長さを求めなさい。





糸が通る面だけを展開図にすると左の図のようになる。
糸がもっとも短くなるときの長さは，左の図のAGの長さである。
$\triangle$ADGで，
$AG^2 = AD^2 + DG^2 = 5^2 + (5+5)^2 = 125$
$AG>0$ だから，$AG = 5\sqrt{5}$（cm）

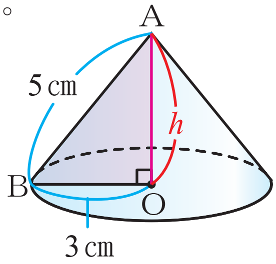
答え　$5\sqrt{5}$ cm

中３数学　三平方の定理

空間図形への活用(5)

名前

【１】右の図の底面の半径が３ cm，母線の長さが５ cmの円錐の体積を求めなさい。



AOの長さを h cmとすると，ΔABOは直角三角形なので，

$AB^2 = h^2 + BO^2$

$h^2 = AB^2 - BO^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

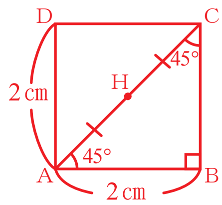
$h>0$ だから，$h=4$

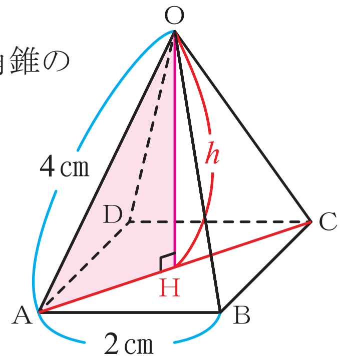
求める体積を V cm³ とすると，

$V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$

答え　12π cm³

【２】右の図の底面が１辺２ cmの正方形，側面の辺ＯＡの長さが４ cmの正四角錐の体積と表面積を求めなさい。





正四角錐の頂点から底面へ垂線OHをひくと，点Hは底面の正方形の対角線ACの中点である。

ΔABCは直角二等辺三角形なので，AB : AC＝2 : AC＝1 : $\sqrt{2}$

AC＝$2\sqrt{2}$ (cm)

AH＝AC ÷2＝$\sqrt{2}$ (cm)

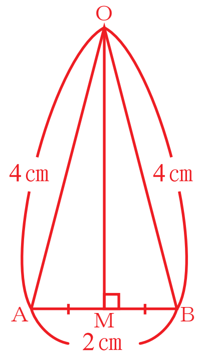
OHの長さを h cmとすると，ΔOAHは直角三角形なので，

$OA^2 = h^2 + AH^2$

$h^2 = OA^2 - AH^2 = 4^2 - (\sqrt{2})^2 = 14$

$h>0$ だから，$h=\sqrt{14}$

求める体積を V cm³ とすると，$V = \dfrac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{14} = \dfrac{4\sqrt{14}}{3}$



右の図のように，正四角錐の側面のΔOABの点Oから辺ABに垂線をひき，ABとの交点をMとすると，MはABの中点になるので，AMの長さは１ cmである。

ΔOAMは直角三角形なので，$OA^2 = AM^2 + OM^2$

$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 4^2 - 1^2 = 15$

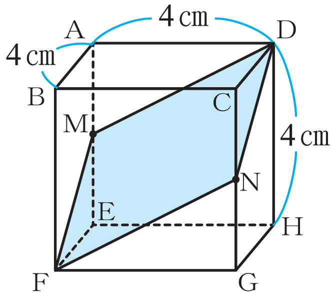
OM>0 だから，OM＝$\sqrt{15}$ よってΔOABの面積は $\dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} = \sqrt{15}$ (cm²)

求める表面積を S cm² とすると，側面の４つの三角形はすべて合同だから，

$S = 4 \times$ΔOAB＋底面積 $= 4 \times \sqrt{15} + 2^2 = 4 + 4\sqrt{15}$

体積　$\dfrac{4\sqrt{14}}{3}$ cm³　　表面積　$4 + 4\sqrt{15}$ cm²

【３】右の図の１辺が４ cmの立方体で，辺ＡＥの中点をＭ，辺ＣＧの中点をＮとする。次の問いに答えなさい。



(1) 線分ＭＮの長さを求めなさい。

MN＝ACであり，ACは２辺が４ cmの直角二等辺三角形の斜辺だから，

4 : AC＝1 : $\sqrt{2}$

AC＝MN＝$4\sqrt{2}$ (cm)

答え　$4\sqrt{2}$ cm

(2) 線分ＤＦの長さを求めなさい。

$DF = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DH^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$ (cm)

答え　$4\sqrt{3}$ cm

(3) 四角形ＤＭＦＮの面積を求めなさい。

２辺とその間の角が等しいので，ΔAMD≡ΔEMF≡ΔGNF≡ΔCNDである。

よって，四角形DMFNは４つの辺がすべて等しいひし形である。

求める面積を S cm² とすると，$S = MN \times DF \div 2 = 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} \div 2 = 8\sqrt{6}$

答え　$8\sqrt{6}$ cm²