中３数学　円

円の性質の利用(1)

名前

円と接線

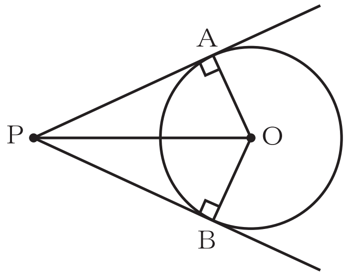
円と接線において次の定理が成り立つ。

1. 円の接線と接点を通る半径とは互いに垂直である。

例) 右の図の円Oにおいて,PA ⊥ OA , PB ⊥ OB である。

2. 円の外部の１点からひいた２本の接線の長さは等しい。

例) 右の図の円Oにおいて , P A = P B である。



接線のひき方

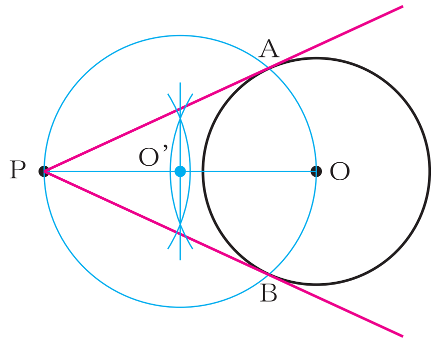
円Oの外部の点Pから接線をひく場合 , コンパスと定規を用いて , 次の手順で作図できる。

① 線分ＰＯの中点O’を求める。

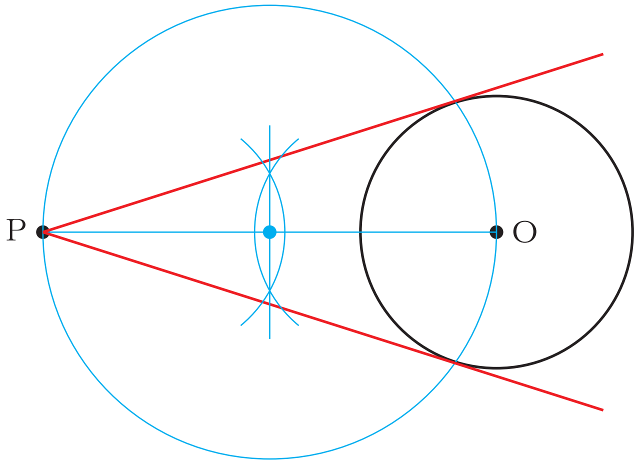
② ＰO’を半径とした円O’をかく。

③ 円Oと円O’の交点をＡＢとする。

④ 接線である直線ＰＡ, ＰＢをひく。



【１】 コンパスと定規を用いて , 右の図の点Ｐから円Oへの接線を作図しなさい。



【２】下の点Oを中心として , 半径２cmの円Oをかき , 点Oから６cmの距離に点Ｐをとり , 点Ｐから円Oへの接線を作図しなさい。

また , 三平方の定理を利用して , 接線の長さを計算しなさい。

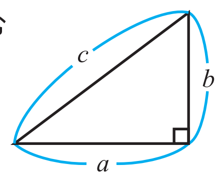
三平方の定理

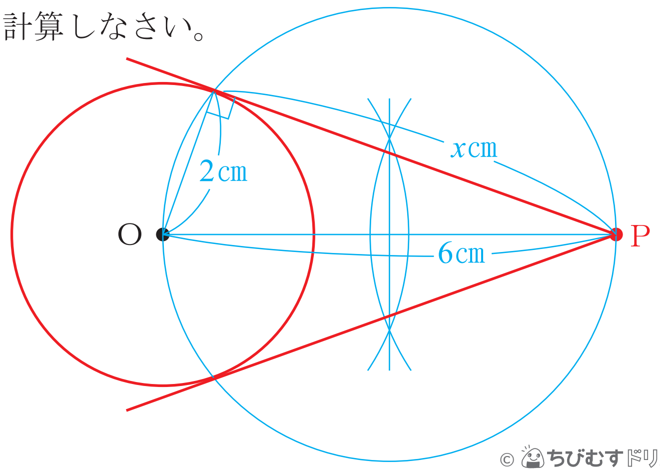
直角三角形の直角をはさむ

２辺の長さを a, b,

斜辺の長さを c とすると ,

$a^2 + b^2 = c^2$





接線の長さを x とすると ,

三平方の定理より ,

$x^2 + 2^2 = 6^2$

$x^2 = 32$

$x > 0$ だから , $x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

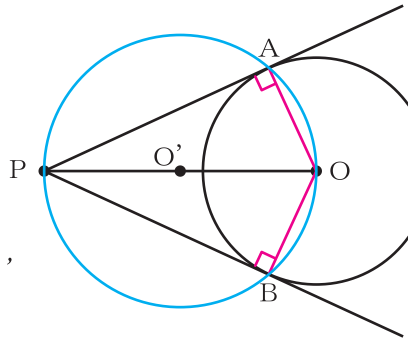
接線の長さ　$4\sqrt{2}$ cm

中３数学　円

円の性質の利用（2）

名前

【１】右の図において，点Ｐから円Ｏにひいた接線の接点Ａ, ＢはＰＯを直径とする円Ｏ’の円周上にある。このことを□をうめて，証明しなさい。



円の接線は，接点を通る半径に ㋐ 垂直 なので，

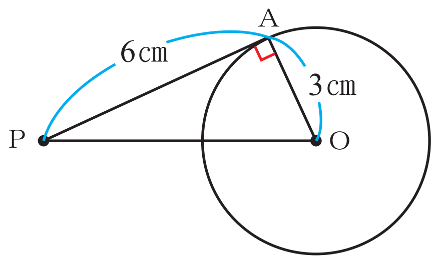
∠ＰＡＯ＝∠ＰＢＯ＝ ㋑ 90 °

直径に対する ㋒ 円周角 は 90°であるから，

∠ＰＡＯ, ∠ＰＢＯは円Ｏ’の直径ＰＯに対する ㋓ 円周角 である。

よって，接点Ａ, Ｂは円Ｏ’の円周上にある。

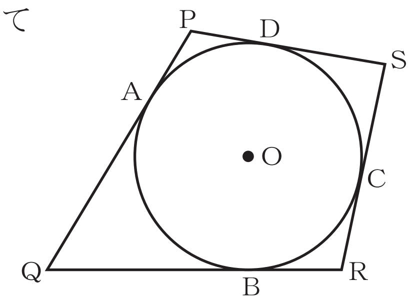
【２】右の図のように，点Ｐから半径３cmの円Ｏに接線をひき，接点をＡとする。線分ＰＡの長さが６cmのとき，線分ＰＯの長さを求めなさい。



線分ＰＯの長さを x cmとすると，
ΔＰＯＡはＰＯを斜辺とする直角三角形だから，
三平方の定理より，　$x^2 = 6^2 + 3^2 = 45$
$x > 0$ だから，$x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

答え　$3\sqrt{5}$ cm

【３】右の図のように，四角形Ｐ, Ｑ, Ｒ, Ｓの各辺が円Ｏに点Ａ, Ｂ, Ｃ, Ｄで接しているとき，ＰＱ＋ＲＳ＝ＰＳ＋ＱＲであることを□をうめて証明しなさい。



円の外部の１点からひいた２本の接線の長さは

㋔ 等しい ので，

ＰＡ＝ ㋕ ＰＤ ，ＱＡ＝ ㋖ ＱＢ ，

ＲＢ＝ ㋗ ＲＣ ，ＳＣ＝ ㋘ ＳＤ

ＰＱ＋ＲＳ＝（ＰＡ＋ＱＡ）＋（ＲＣ＋ＳＣ）

ＰＳ＋ＱＲ＝（ＰＤ＋ＳＤ）＋（ＱＢ＋ＲＢ）＝ＰＡ＋ＳＣ＋ＱＡ＋ＲＣ＝（ＰＡ＋ＱＡ）＋（ＲＣ＋ＳＣ）

よって，ＰＱ＋ＲＳ＝ＰＳ＋ＱＲである。

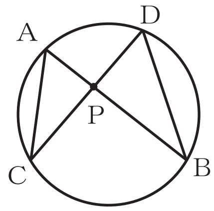
中３数学　円

円の性質の利用(3)

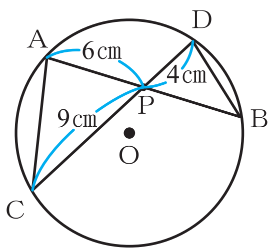
名前

円と相似

右の図のように２つの弦AB, CDの交点をPとすると，
ΔAPC∽ΔDPBである。



【１】右の図の円Oにおいて，２つの弦AB, CDの交点をPとする。
次の問いに答えなさい。



(1) ΔAPC∽ΔDPBとなることを□をうめて，証明しなさい。

ΔAPCとΔDPBにおいて，

$\overset{\frown}{CB}$に対する ㋐ 円周角 は等しいので，

∠CAP＝∠ ㋑ BDP（PDB） …①

$\overset{\frown}{AD}$に対する ㋒ 円周角 は等しいので，

∠ACP＝∠ ㋓ DBP（PBD） …②

①, ②より， ㋔ ２組の角 がそれぞれ等しいので，

ΔAPC ∽ ㋕ ΔDPB

(2) BPの長さを求めなさい。

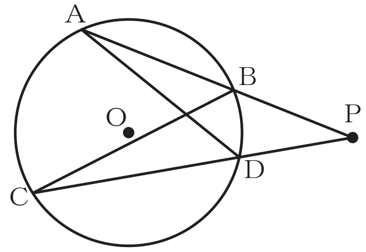
ΔAPC∽ΔDPBより，AP : DP＝CP : BP

6 : 4＝9 : BP

$BP = \frac{36}{6} = 6$

答え　6 cm

【２】右の図において，円Oの２つの弦AB, CDを延長した直線の交点をPとすると，ΔAPD∽ΔCPBとなることを証明しなさい。



ΔAPDとΔCPBにおいて，
$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角は等しいので，
∠PAD＝∠PCB　…①
共通の角なので，
∠APD＝∠CPB　…②
①, ②より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔAPD∽ΔCPB

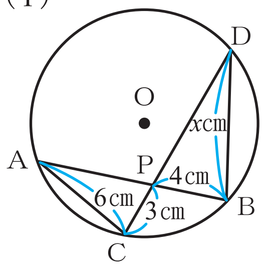
中３数学　円

円の性質の利用(4)

名前

【１】 下の図の x の値を求めなさい。

(1)



ΔAPCとΔDPBにおいて，

∠CAP＝∠BDP　…①

∠ACP＝∠DBP　…②

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔAPC∽ΔDPB

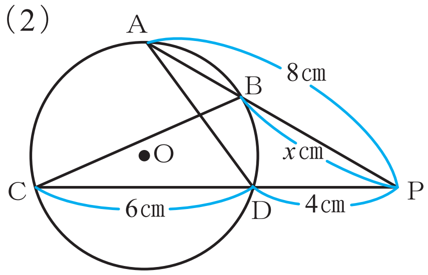
よって，AC：DB＝CP：BP

$6 : x = 3 : 4$

$x = \frac{24}{3} = 8$

答え　$x = 8$

(2)



ΔAPDとΔCPBにおいて，

∠PAD＝∠PCB　…①

∠APD＝∠CPB　…②

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔAPD∽ΔCPB

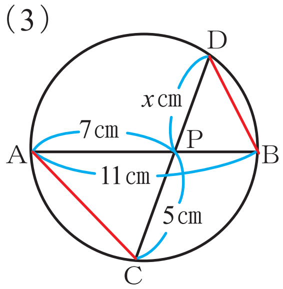
よって，AP：CP＝DP：BP

$8 : (6+4) = 4 : x$

$x = \frac{40}{8} = 5$

答え　$x = 5$

(3)



ΔAPCとΔDPBにおいて，

∠CAP＝∠BDP　…①

∠ACP＝∠DBP　…②

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔAPC∽ΔDPB

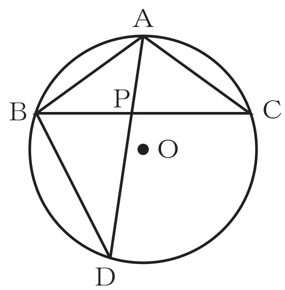
よって，AP：DP＝CP：BP

$7 : x = 5 : (11-7)$

$x = \frac{28}{5} = 5.6$

答え　$x = 5.6$

【２】右の図において，A,B,C,Dは円Oの円周上の点で，
ΔABCはAB＝ACの二等辺三角形である。
ADとBCの交点をPとすると，ΔABP∽ΔADBと
なることを証明しなさい。



ΔABPとΔADBにおいて，

ΔABCは二等辺三角形だから，∠ABP＝∠ACB　…①

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいので，∠ACB＝∠ADB　…②

①，②より，∠ABP＝∠ADB　…③

共通の角なので，∠PAB＝∠BAD　…④

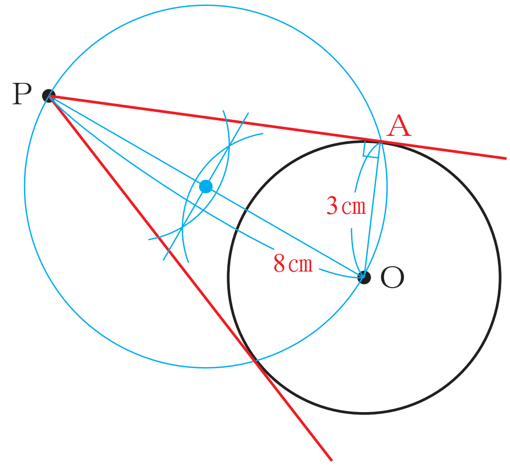
③，④より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔABP∽ΔADB

中３数学　円

円の性質の利用(5)

名前

【１】コンパスと定規を用いて，右の図の点Ｐから円Ｏへの接線を作図しなさい。
また，円Ｏの直径が 6 cm，円の中心Ｏから点Ｐまでの距離が 8 cmのときの接線の長さを計算しなさい。



接点をＡとすると，OAは円Ｏの半径だから，OA ＝ 3 cm
接線の長さを x とすると，
ΔＰＯＡはＰＯを斜辺とする直角三角形だから，
三平方の定理より，

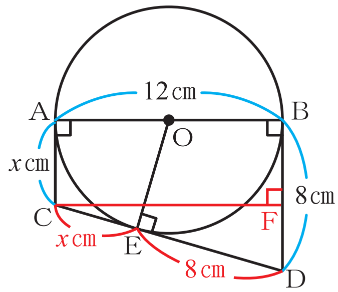
$x^2+3^2=8^2$

$x^2=55$

$x>0$ だから，$x=\sqrt{55}$

接線の長さ　$\sqrt{55}$ cm

【２】右の図において，ABは円Ｏの直径，ＣＤは点Ｅにおける円Ｏの接線である。x の値を求めなさい。



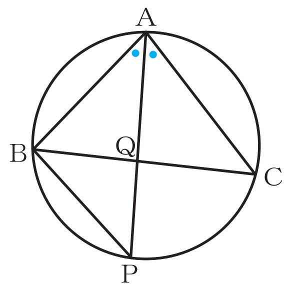
点ＣからBDに垂線CFをひくと，ＣＦ＝ＡＢ＝12 cm
円の外部の１点からひいた２本の接線の長さは等しいから，
ＣＥ＝ＣＡ＝x cm，ＤＥ＝ＤＢ＝8 cm
ΔCDFはCDを斜辺とする直角三角形だから，
三平方の定理より，$CF^2+DF^2=CD^2$

$12^2+(8-x)^2=(x+8)^2$

これを解いて，　$x=4.5$

答え　$x=4.5$

【３】右の図において，A, B, Cは円周上の点であり，∠BACの二等分線と円との交点をP，弦BCとの交点をQとする。次の問いに答えなさい。



(1) ΔABP∽ΔAQCとなることを証明しなさい。

ΔABPとΔAQCにおいて，
APは∠BACの二等分線だから，∠BAP ＝∠QAC　…①
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいので，∠APB ＝∠ACQ　…②
①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔABP∽ΔAQC

(2) ΔABP∽ΔBQPとなることを証明しなさい。

ΔABPとΔBQPにおいて，
$\overset{\frown}{PC}$に対する円周角は等しいので，∠QBP ＝∠CAP
APは∠BACの二等分線だから，∠BAP ＝∠CAP
よって，∠QBP ＝∠BAP　…①
共通の角なので，∠APB ＝∠BPQ　…②
①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，ΔABP∽ΔBQP